

BİLİM ve TEKNİĞE KATKILAR

Değişken Isıl Özellikli Hareketli
Sınır Şartı ProblemiİSMAİL TOSUN
ODTÜ Kimya Müh. Bölümü

Orta Doğu Teknik Üniversitesi Kimya Mühendisliği bölümünden 1972 yılında lisans, 1974 yılında yüksek lisans derecesini aldı. 1974-1977 yılları arasında Amerika Birleşik Devletlerinde Akron Üniversitesinde doktora çalışması yaptı. Halen Orta Doğu Teknik Üniversitesi Kimya Mühendisliği bölümünde öğretim üyesidir. İlgilendiği konular gözenekli ortamlardan akış ve ısı transferi, ısı difüzyon ve filtrasyonun matematiksel modellemesidir.



ABSTRACT :

Melting phenomenon of a semi-infinite solid is investigated when the surface is changed from the melting temperature to some higher temperature. Approximate solution is given when the thermal properties depend on temperature.

ÖZET

Sonsuz uzunlukta bir katının yüzey sıcaklığının erime noktasından daha yüksek bir sıcaklığa artırılmasının erime üzerindeki etkisi incelenmiştir. Isıl özelliklerin sıcaklığa bağlı olduğu durumlarda yaklaşık çözüm verilmiştir.

GİRİŞ

Donma ve erime gibi fiziksel işlemlerde iki faz arasındaki hareketli sınırı belirleme problemi genellikle Stefan problemi olarak tanımlanır. Bu problemlerin analitik çözümleri ancak bazı özel şartlarda elde edilebilmiştir. Bu çözümlerin değişik örnekleri Carslaw ve Jaeger tarafından verilmiştir. Hareketli sınır problemlerinin yaklaşık çözümleri Goodman² tarafından integral metodu kullanılarak elde edilmiştir.

Bu çalışmanın amacı, ısı özelliklerin (ρ , C_p , k) sıcaklığa bağlı olduğu durumlarda hareketli sınır probleminin yaklaşık çözümünü elde etmektir. Önerilen yöntem ardışık yaklaştırmaya dayanmakta olup çözüm için gerekli iterasyon sayısının az olduğu gözlenmiştir.

PROBLEMİN TANIMI

Yarı sonsuz bir katı erime sıcaklığı olan T_m 'de bulunmaktadır. $t = 0$ anında katının yüzeyi ($x = 0$) daha yüksek bir sıcaklığa, T_s , çıkarılmaktadır. Sıvı-katı fazları arasındaki hareketli sınırı belirgin olduğu ve yarı sonsuz bölgeye doğru ilerlediği varsayılmıştır. Bu şartlar altında ısı iletim denklemi

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) \quad 0 \leq x \leq s(t) \quad (1)$$

olarak gösterilir. Sınır şartları

$$\left. \begin{array}{l} x = 0 \quad T = T_s \\ x = s(t) \quad T = T_m \end{array} \right\} t > 0 \quad (2)$$

şeklinde verilmiştir. Sıvı-katı sınırının hareketi ise

$$\frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{\rho \lambda}{k} \frac{ds}{dt} \quad x = s(t) \quad (3)$$

bağlantısı ile gösterilir. Başlangıç şartı

$$s = 0 \quad t = 0 \quad (4)$$

olarak verilmiştir.

Isıl özellikler sıcaklığa bağlı olduğu için, bağımlı değişkenin Goodman³ tarafından önerilen

$$\phi = \int_0^T \rho C_p dT \quad (5)$$

şeklindeki dönüşümü ile ısı iletim denklemi, Denklem (1), ve sınır şartları, Denklem (2) ve (3), aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\alpha(\phi) \frac{\partial \phi}{\partial x} \right] \quad (6)$$

$$\left. \begin{array}{l} x = 0 \quad \phi = \phi_s \\ x = s(t) \quad \phi = \phi_m \end{array} \right\} t > 0 \quad (7)$$

$$\alpha \frac{\partial \phi}{\partial x} = -\rho \lambda \frac{ds}{dt} \quad x = s(t) \quad (8)$$

Matematiksel kolaylık için bağımlı değişkenin

$$\psi = \frac{\phi_s - \phi}{\phi_s - \phi_m} \quad (9)$$

şeklindeki dönüşümü ile Denklem (6), (7) ve (8)

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\alpha(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial x} \right] \quad (10)$$

$$\left. \begin{array}{l} x = 0 \quad \psi = 0 \\ x = s(t) \quad \psi = 1 \end{array} \right\} t > 0 \quad (11)$$

$$\alpha \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{1}{f} \frac{ds}{dt} \quad x = s(t) \quad (12)$$

ifadelerine indirgenir. Denklem (12) 'de $\beta = (\phi_s - \phi_m)/\rho \lambda$ olarak alınmıştır.

Bağımsız değişkenleri değiştirerek Denklem (10) aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \psi} \left[\frac{\alpha(\psi)}{\partial x / \partial \psi} \right] = 0 \quad 0 \leq \psi \leq 1 \quad (13)$$

ÇÖZÜM

Çözüm için yapılan ilk yaklaşım yarı-kararlı durum varsayımdır. Bu şartlarda Denklem (10)'daki zamana bağlı terim ihmal edildiğinde

$$\frac{d}{dx} \left[\alpha(\psi) \frac{d\psi}{dx} \right] = 0 \quad (14)$$

bağıntısı elde edilir. Denklem (14)'ün Denklem (11)'deki sınır şartları ile çözümü

$$\frac{x}{s(t)} = \frac{1}{K^2} \int_0^\psi \alpha(z) dz \quad (15)$$

olarak bulunur. Burada

$$K^2 = \int_0^1 \alpha(z) dz \quad (16)$$

şeklinde gösterilmiştir.

Denklem (15)'in x'e göre türevi alınıp Denklem (12) 'de yerine konulursa ve Denklem (4)'deki başlangıç şartı uygulanırsa

$$s(t) = K (2\beta t)^{1/2} \quad (17)$$

ifadesi bulunur. Denklem (15) ve (17)'den

$$x = \frac{(2\beta t)^{1/2}}{K} \int_0^\psi \alpha(z) dz \quad (18)$$

eşitliği elde edilir.

İkinci yaklaşım için Denklem (13) kullanılacaktır. Denklem (18)'in zamana göre türevi alınıp elde edilen sonuç Denklem (13)'de yerine konulursa aşağıdaki bağıntı elde edilir:

$$\frac{\partial}{\partial \psi} \left[\frac{\alpha(\psi)}{\partial x / \partial \psi} \right] = - \frac{\beta}{K (2\beta t)^{1/2}} \int_0^\psi \alpha(z) dz \quad (19)$$

Denklem (19)'un $\psi = 1$ 'den $\psi = \psi$ 'a kadar integrali alındığında

$$\frac{\alpha(\psi)}{\partial x / \partial \psi} - \frac{\alpha(\psi)}{\partial x / \partial \psi} \Big|_{\psi=1} = - \frac{\beta}{K (2\beta t)^{1/2}} \int_0^\psi \alpha(z) dz \quad (20)$$

denklemini ortaya çıkar. Sistemin gerçekte kararsız durumda olduğu dikkate alındığında, ikinci yaklaşımda zamana bağımlılığı yaklaşık olarak ifade edebilmek için Denklem (17)'nin bir b katsayısı ile çarpıldığı varsayılmıştır. Diğer bir deyişle, ikinci yaklaşımda Denklem (17)

$$s = bK (2\beta t)^{1/2} \quad (21)$$

bağıntısıyla ifade edilmiştir. Denklem (21) kullanıldığında Denklem (12)'den

$$\frac{\alpha(\psi)}{\partial x / \partial \psi} \Big|_{\psi=1} = \frac{bK}{(2\beta t)^{1/2}} \quad (22)$$

olarak bulunur. Bu durumda Denklem (20)

$$\frac{\alpha(\psi)}{\partial x / \partial \psi} = \frac{b}{s} \left[bK^2 - \beta \int_1^\psi dy \int_0^y \alpha(z) dz \right] \quad (23)$$

bağıntısıyla gösterilir. Denklem (23)'ün $\psi = 0$ ve $\psi = \psi$ değerleri arasındaki integrasyonundan

$$\frac{bx}{s(t)} = \int_0^\psi \frac{\alpha(r)}{bK^2 - \beta \int_1^r dy \int_0^y \alpha(z) dz} dr \quad (24)$$

eşitliği elde edilir. $x = s(t)$ 'de $\psi = 1$ değerine sahip olduğu için Denklem (23) aşağıdaki şekle dönüşür.

$$b = \frac{1}{\int_0^1 \frac{\alpha(r) dr}{bK^2 - \beta \int_1^r dy \int_0^y \alpha(z) dz}} \quad (25)$$

b değeri Denklem (25)'den iterasyon yöntemi ile hesaplanır. Denklem (21) ve (24) ikinci yaklaşıma göstermektedir. Gerekirse aynı yöntem üçüncü yaklaşıma için de tekrar edilebilir fakat genellikle ikinci yaklaşıma yeterlidir.

ÖRNEK

Eğer $\beta = 1$ ve α değeri sabit varsayılırsa Denklem (10) daki eşitlik ile Denklem (11) ve (12)'deki sınır şartları klasik Stefan problemini belirler. Problemin çözümü

$$\psi = \frac{\text{Erf}(0.618 x/s)}{\text{Erf}(0.618)} \quad (26)$$

olarak verilir ve hareketli sınır için

$$s = 1.236 (\alpha t)^{1/2} \quad (27)$$

ifadesi bulunur. Aynı şartlarda Denklem (25)

$$b = \frac{1}{(2b+1)^{1/2} \ln \frac{(2b+1)^{1/2} + 1}{(2b+1)^{1/2} - 1}} \quad (28)$$

eşitliğine indirgenir ve buradan $b = 0.856$ olarak bulunur. Bu durumda Denklem (21) ve (24) aşağıdaki şekilde yazılır:

$$s = 1.211 (\alpha t)^{1/2} \quad (29)$$

$$\psi = 1.647 \left[\frac{\exp(1.41 x/s) - 1}{\exp(1.41 x/s) + 1} \right] \quad (30)$$

Hareketli sınırı belirlemedeki hata %2'dir.

SONUÇ

Isıl özelliklerin sıcaklığa bağlı olduğu durumlarda hareketli sınır şartı problemi için yaklaşık bir analitik çözüm önerilmiştir. Bu yöntemle klasik Stefan problemi için hareketli sınırı belirlemedeki hatanın %2 olduğu hesaplanmıştır.

Bu problemlerin tam çözümlerinin nümerik yöntemlerle elde edilebilmesi mümkündür. Ancak böyle bir çözüm için gerekli bilgisayar becerisi ve zamanının yaklaşık çözüme kıyasla çok daha fazla olduğu ve yaklaşık çözümün verdiği hata yüzdesinin mühendislik uygulamaları için kabul edilebilir sınırlar içinde olduğu düşünülürse bu yöntemin Stefan problemlerinin çözümüne yarar sağlayacağı açıktır.

SİMGELER

- C_p ısı kapasitesi
 k_p ısı iletkenlik katsayısı
 s sıvı-katı fazları arasındaki hareketli sınırın uzaklığı
 T sıcaklık
 t zaman
 x koordinat
 α ısıl yayımlılık katsayısı
 λ gizli ısı
 ρ yoğunluk
 ϕ bağımlı değişken, Denklem (5)
 ψ bağımlı değişken, Denklem (9)

KAYNAKLAR

- (1) H.S. Carslaw ve J.C. Jaeger, "Conduction of Heat in Solids", Oxford Univ. Press, London, 1959.
- (2) T.R. Goodman, "Application of Integral Methods to Transient Nonlinear Heat Transfer", Advances in Heat Transfer, 1(1964), s. 51-122.
- (3) T.R. Goodman, "The Heat Balance Integral-Further Considerations and Refinements", J. Heat Transfer, 83(1961), s.83-86.

firmalarımızı tanıyalım

Teba ısıtma-soğutma-klima.

Teba grubuna bağlı Şirketler ve Çalışma sahaları:

- EN-TE Endüstri ve Tesisat A.Ş.. Ana Firma; ısıtma-soğutma-klima cihazları imalatı genel satıcılığı ve dış taahhüt organizasyonu.
- ISK A.Ş. ısıtma, soğutma, klima cihazları ve dayanıklı tüketim malzemeleri imalatı.
- Güñkol A.Ş.. ısıtma, soğutma, klima cihazları, güneş kolektörleri ve elektrikli ev aletleri imalatı
- SESA Serpantin Sanayii A.Ş.. Serpantin ve elektrikli ev aletleri imalatı.
- Sisaş soğutma ve iklimlendirme A.Ş. Soğutma grupları ve cihazların imalatı ve montajı.

— Baycan Sınai ve Sosyal Tesisler A.Ş.. Komple anahtar teslimi Taahhüt

İşçi sayısı : 350
 Mühendis sayısı : 55
 İdari Personel 43

Üretim:

Soğutma grubu, soğutma kulesi, paket soğutma cihazları, klima santralleri, tek emişli vantilatörler, duvar ve tavan tipi ısıtma apareyleri, fan-coil cihazları, salon tipi ısıtma apareyleri, konvektör, eşanjör, su tasfiye cihazı, aksiyal vantilatörler, güneş kolektörleri, Elektrikli konvektör, elektrikli ve bütangazlı fırın ve elektrik ocakları.

Bazı Referanslar:

Konfor kliması olarak 225 müstakil binda soğutma ve klima tatbikatı. Samsun ve Akhisar tekel sigara fabrikaları klima malzemeleri. Samsun sigara fab-

rikası 10.000.000 kcal/hx2 inşai tip soğutma kulesi, Amerikan Ecodyne firması ile müştereken.

Ankara İzmir Gaziantep PTT tesisleri klima tesisatları, İncirlik ODTÜ klima tesisleri, YKB, İş Bankası Emekli Sandığı mensupları tesisleri, Akbank-Pa mukbank tesisleri klima tesisatları. Otosan II İnönü fabrikası klima tesisatı. Muhtelif komple fabrika ısıtma ve klima tesisleri, Toz toplama tesisleri, Demineralizasyon tesisleri. Pis su arıtma tesisleri. Güneş kolektörü ile genel tatbikatlar, (Çukurova Üniversitesi lojmanları, Beden Terbiyesi kapalı spor salonları). Muhtelif ve yurt dışında dağılmış resim ve özel sektör malzeme satışları.

İhracaat Çalışmaları:

1980-81 ihracaat hedefi 1 milyon dolardır. Bugüne kadar İran-Mısır bağlantıları gerçekleştirilmiş, Irak, Belçika, Libya ve Fransa'dan siparişler beklenmektedir.

Bugüne kadar elektrikli ev aletleri üzerinde gerçekleşen ihracaat, bugünlerde ısıtma-soğutma-klima konusuna da kaymakta ve yurt dışından gelen mümessillik talepleri değerlendirilmektedir.

Yabancı firma ilişkileri:

Soğutma kompresörleri konusunda Japon DAIKIN firması, inşai tip soğutma kuleleri, Amerikan ECODYNE firması; Taahhütte SULZER firmasıyla joint Venture çalışmaları.

İmalat yerleri:

İzmir'de bağımsız 5 ünite ve İstanbul'da bir servis atölyesi olmak üzere toplam 10.300 m² kapalı imalat alanı.

Genel Müdürlük : EN-TE A.Ş.
 Cumhuriyet Bulvarı No.48 İZMİR
 Tel: 131007 145521

Bölge Müdürlükleri: --ENTE--A.Ş.
 İstanbul Bölge Müdürlüğü
 Necatibey Cad. Kölemen Sok.Durmuş oğlu Han No.8 K.1
 Karaköy İSTANBUL
 Tel: 453030-457772

—EN—TE A.Ş.
 Ankara Bölge Müdürlüğü
 Sümer Sok. Kardeşler Apt. 36/3
 Kızılay—ANKARA
 Tel: 301570-300464

—EN—TE A.Ş.
 Adana Bölge Müdürlüğü
 Ziyapaşa Bulvarı No.26/4
 ADANA
 Tel: 17293