

SİMGELER

- a_o : ondüle kanalı eğri yarıçapı, cm
 a : film yüzeyi eğri yarıçapı, cm
 b_o : ondüle tepesi eğri yarıçapı, cm
 d : ondüle derinliği, cm
 D : boru çapı, cm

$$F1 : -3/4h^4 + 5/3h^3a + a^2h^2 - 2a^3h +$$

$$(a^2 - h^2) \ln \frac{a+h}{a}$$

$$F2 : -4h \frac{dh}{d\theta} (h^2/2 - ah + (a^2 - h^2) \ln \frac{a+h}{a})$$

$$F3 : -(h^4 + 4/3 ah^3 + 2(\frac{dh}{d\theta})^2 + h \frac{d^2h}{d\theta^2})$$

$$(h^2/2 - ah + (a^2 - h^2) \ln \frac{a+h}{a})$$

$$F4 : -\rho g/\mu (h^4/4 - 2/3 h^3)$$

- g : yerçekimi ivmesi, 980 cm/san²
 H, h : film kalınlığı, cm
 N : ondüle sayısı
 P : basınç, atm

- p : ondüle tepe uzaklığı, cm
 $\dot{V}$: hacimsal hız, ml/dak
 V_z : akım hızı, cm/dak
 σ : yüzey gerilim, dyne/cm
 ρ : yoğunluk, gm/cm³
 μ : viskozite gm/cm-san
 α, θ : ondüle açısı
 λ : film yüzeyi açısı, rad

KAYNAKLAR

1. Batchelor, G.K., "An Introduction to Fluid Dynamics", Cambridge Univ. Press. New York, p. 147-151, (1967).
2. Bird, R.B., Steward, W.E., Lightfoot, E.N., "Transport Phenomena", p.83-85, Wiley and Sons, New York, (1960).
3. Gregorig, Zeit. Für. Ang. Math. Physik, 5, 36-49, (1954).
4. Kantorovich, L.V. ve Krylov, V.I., "Approximate Methods of Higher Analysis". Interscience, New York, (1959).
5. Osipow, L.I., "Surface Chemistry and Industrial Applications", Chapman and Hall Ltd., London, (1962).
6. Schlichting, H., "Boundary Layer Theory", McGraw Hill Book Co., New York, (1955).
7. Somer, T.G., Özgen C., Desalination, 34, 233-247, (1980).

Kritik Reynolds Sayısının Hesaplanması Üzerine Bir İnceleme

İsmail Tosun*

O.D.T.Ü. Kimya Müh. Bölümü

ABSTRACT

The use of generalized stability parameter to calculate the critical Reynolds number for pipe flow, flow between parallel plates, and flow in concentric annulus is presented.

ÖZET

Kararlılık parametresi kullanılarak boru içindeki, iki paralel levha arasındaki ve eşmerkezli iki boru arasındaki akışlar için kritik Reynolds sayısını hesaplama yöntemi gösterilmiştir.

GİRİŞ

Isı değiştiricilerinde, akışkan genellikle boru içinden, eşmerkezli iki boru arasından, veya iki paralel levha arasından akar. Bu tip cihazların tasarımı için gerekli olan toplam ısı transfer katsayısı literatürdeki korelasyonlar yardımıyla hesaplanabilir. Bu korelasyonlar akışın laminar veya kargaşalı olmasına göre değiştiğinden, herhangi bir akış geometrisi için kritik Reynolds sayısının bilinmesi gerekmektedir. Bu incelemede, kritik Reynolds sayısını teorik olarak hesaplama yöntemi gösterilmiştir.

KARARLILIK PARAMETRESİNİN TANIMI

Akışkanlar için momentum korunum denklemleri

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2} \rho \nabla (v \cdot v) - \rho v \times w = -\nabla P - \nabla \cdot \tau + \rho g \quad (1)$$

şeklinde yazılır. Burada soldaki 3. terim akışkanın açısal momentumunun değişme hızını, sağdaki 2. terim ise akışkana etki eden sürtünme kuvvetini göstermektedir. Hanks [1], şekli değişen bir akışkan hacminde, açısal momentum artış hızının yüzeyden sürtünmeyle kaybolan momentum hızına oranının kritik bir değere ulaşmasıyla, kararlı laminar akışın kargaşalı akışa dönüşeceği ileri sürerek kararlılık parametresini, Z ,

$$|\rho v \times w| = Z |\nabla \cdot \tau| \quad (2)$$

şeklinde tanımlamıştır. Tanımından da anlaşılacağı gibi kararlılık parametresi pozitif bir değere sahiptir. Katı-sıvı yüzeyinde ($v = 0$) ve simetri eksenini boyunca ($w = 0$) Z değeri sıfır olacağı için akış alanı içinde Z değeri maksimum bir değere, Z_m , ulaşacaktır.

* Yazar daha önceki sayılarımızda tanıtılmıştı.

Zamanla değişmeyen doğrusal akışlar için

$$\frac{1}{2} \nabla (v \cdot v) = v \times w \quad (3)$$

bağıntısı kullanılarak Denklem (1) aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\nabla \cdot \tau = -\nabla P + \rho g \quad (4)$$

Bu durumda, Denklem (2)'de tanımlanan kararlılık parametresi

$$Z = \frac{1}{2} \rho \frac{|\nabla (v \cdot v)|}{|-\nabla P + \rho g|} \quad (5)$$

şeklinde ifade edilir. Çeşitli akış geometrileri için Z değerleri Tablo 1'de gösterilmiştir.

bağıntıdan sürtünme katsayısı

$$f = \left(-\frac{dP^*}{dz} \right) \frac{D_e}{2\rho \langle v_z \rangle^2} \quad (8)$$

olarak bulunur. Reynolds sayısı

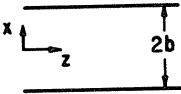
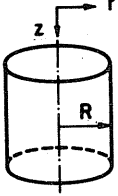
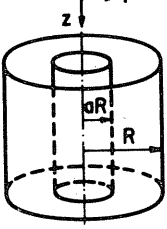
$$Re = \frac{D_e \langle v_z \rangle \rho}{\mu} \quad (9)$$

ifadesiyle tanımlanıp Denklem (6)'da yerine konulursa

$$f = \frac{16\mu}{D_e \langle v_z \rangle \rho} \quad (10)$$

elde edilir. Denklem (8) ve (10)'dan eşdeğer çap için

Tablo 1. İki paralel levha, boru ve eş merkezli iki boru için ϕ , Re ve Z değerleri

GEOMETRİ	ϕ	Re	Z
	$\sqrt{2/3}$	$\sqrt{\frac{32}{3}} \frac{b \langle v_z \rangle \rho}{\mu}$	$\frac{1}{2} \rho \frac{ dv_z^2/dx }{ dp^*/dz }$
	1	$\frac{2R \langle v_z \rangle \rho}{\mu}$	$\frac{1}{2} \rho \frac{ dv_z^2/dr }{ dp^*/dz }$
	Denklem (14)	$\frac{2R(1-a)\phi \langle v_z \rangle \rho}{\mu}$	$\frac{1}{2} \rho \frac{ dv_z^2/dr }{ dp^*/dz }$

EŞDEĞER ÇAP

Boru içinde laminar akışta akan Newtonian bir akışkan için sürtünme katsayısı ile Reynolds sayısı arasındaki bağıntı

$$f = \frac{16}{Re} \quad (6)$$

olarak verilir. Bu bağıntının eşmerkezli iki boru arasından veya iki paralel levha arasından akan akışkanlar için de aynı şekilde geçerli olması için Lohrenz ve Kurata [2] eşdeğer çap ifadesini aşağıdaki şekilde tanımlamışlardır:

Sürüklenme kuvveti ile sürtünme katsayısı arasındaki

$$F_D = AKf \quad (7)$$

$$D_e^2 = \frac{32\mu \langle v_z \rangle}{(-dp^*/dz)} \quad (11)$$

ifadesi bulunur.

Eşmerkezli iki boru arasından laminar akışta akan Newtonian bir akışkanda ortalama hız aşağıda gösterilmiştir [3]:

$$\langle v_z \rangle = \left(-\frac{dP^*}{dz} \right) \frac{R^2}{8\mu} \left[(1+a^2) + \frac{(1-a^2)}{\ln a} \right] \quad (12)$$

Denklem (12) Denklem (11)'de yerine konulduğunda

$$D_e = 2R(1-a)\phi \quad (13)$$

eşitliği bulunur. Burada

$$\phi = \left\{ \frac{1}{(1-a)^2} \left[(1+a^2) + \frac{(1-a^2)}{\ln a} \right] \right\}^{1/2} \quad (14)$$

şeklinde gösterilmiştir.

Dikkat edilecek olursa, Denklem (13)'de tanımlanan eşdeğer çap genel olarak tanımlanan eşdeğer çapın (4xakış alanı/ısıtılan çevre) bir düzeltme faktörü, ϕ , ile çarpımına eşittir. Çeşitli akış geometrileri için ϕ değeri Tablo 1'de verilmiştir.

DEĞİŞİK AKIŞ GEOMETRİLERİ İÇİN KRİTİK REYNOLDS SAYILARININ HESAPLANMASI

Boru içinden Akış

Boru içinde laminar akışta akan Newtonian bir akışkanda hız dağılımı

$$V_z = \left(-\frac{dP^*}{dz} \right) \frac{R^2}{4\mu} (1-\xi^2) \quad (15)$$

şeklinde dir. Burada

$$P^* = P - \rho g z \quad (16)$$

$$\xi = r/R \quad (17)$$

olarak tanımlanmıştır.

Hız dağılımının Tablo 1'deki kararlılık parametresi tanımında yerine konulmasıyla aşağıdaki ifade elde edilir:

$$Z = \frac{1}{2} \text{Re } \xi (1-\xi^2) \quad (18)$$

Denklem (18)'in ξ 'ye göre türevi alınıp elde edilen sonuç sıfıra eşitlenirse

$$\bar{\xi} = \sqrt{1/3} \quad (19)$$

olarak bulunur. Bu noktada kararlılık parametresi aşağıda gösterilen maksimum değere ulaşır:

$$Z_m = \sqrt{1/27} \text{Re}_k \quad (20)$$

Hanks [1] tarafından elde edilen bu sonuç Ryan ve Johnson [4] tarafından da bulunmuştur.

Boru içinden akışlarda kritik Reynolds sayısı 2100 olarak kabul edildiğinde

$$Z_m = 404 \quad (21)$$

sayısı elde edilir.

İki Paralel Levha Arasından Akış

İki paralel levha arasından laminar akışta akan Newtonian bir akışkanda hız dağılımı

$$V_z = \left(-\frac{dP^*}{dz} \right) \frac{b^2}{2\mu} (1-\eta^2) \quad (22)$$

şeklinde dir. Burada

$$P^* = P - \rho g x \quad (23)$$

$$\eta = x/b \quad (24)$$

olarak tanımlanmıştır.

Hız dağılımının Tablo 1'deki kararlılık parametresi tanımında yerine konulmasıyla aşağıdaki ifade elde edilir:

$$Z = \sqrt{27/128} \text{Re } \eta (1-\eta^2) \quad (25)$$

Denklem (25)'den kararlılık parametresinin maksimum olduğu nokta

$$\bar{\eta} = \sqrt{1/3} \quad (26)$$

olarak bulunur. Bu noktadaki maksimum Z değeri aşağıda verilmiştir.

$$Z_m = \frac{\sqrt{2}}{8} \text{Re}_k \quad (27)$$

Denklem (27)'de $Z_m = 404$ olarak alınırsa

$$\text{Re}_k = 2285 \quad (28)$$

elde edilir.

Dikkat edilirse, boru içinden veya iki paralel levha arasından akan akışlarda kritik Reynolds sayıları farklı olmasına karşın her iki durumda da aynı Z_m değeri geçerlidir.

Eşmerkezli İki Boru Arasından Akış

Eşmerkezli iki boru arasından laminar akışta akan Newtonian bir akışkanda hız dağılımı

$$V_z = \left(-\frac{dP^*}{dz} \right) \frac{R^2}{4\mu} (1-\xi^2 + 2\lambda^2 \ln \xi) \quad (29)$$

şeklinde dir. Burada

$$P^* = P - \rho g z \quad (30)$$

$$\xi = r/R \quad (31)$$

$$\lambda^2 = \frac{1-a^2}{2 \ln (1/a)} \quad (32)$$

olarak tanımlanmıştır. Denklem (29)'dan da anlaşılabileceği gibi, hızın maksimum değere ulaştığı noktadaki ξ değeri λ olarak ifade edilmiştir.

Hız dağılımının Tablo 1'deki kararlılık parametresi tanımında yerine konulmasıyla aşağıdaki ifade elde edilir:

$$Z = \frac{1}{2} \frac{\text{Re}}{(1-a)^3 \phi^3} (1-\xi^2 + 2\lambda^2 \ln \xi) \left| \xi - \frac{\lambda^2}{\xi} \right| \quad (33)$$

Bu akış geometrisinin daha önce incelenen akış geometrilerinden ayrıcalık gösteren tarafları vardır. Bundan önce incelenen her iki durumda da maksimum hız akış alanının simetri eksenine boyunca oluşmuştur. Bu durumda ise maksimum hız iç boruya daha yakın bir mesafede oluşur. ξ değerinin a , λ ve 1'e eşit olduğu durumlarda Z değeri sıfır olduğu ve $Z \geq 0$ olduğu için eşmerkezli iki boru arasından akan akışta Z değeri iki ayrı noktada maksimum değere ulaşacaktır. Bu nedenle akış alanının iki ayrı bölgede incelenmesi

gerekmektedir.

İç bölge: ($a \leq \xi \leq \lambda$)

$$\frac{dZ}{d\xi} \bigg|_{\xi_1} = 0 = \frac{2(\lambda^2 - \xi_1^2)^2 - (1 - \xi_1^2 + 2\lambda^2 \ln \xi_1)}{(\xi_1^2 + \lambda^2)} \quad (34)$$

Dış bölge: ($\lambda \leq \xi \leq 1$)

$$\frac{dZ}{d\xi} \bigg|_{\xi_2} = 0 = \frac{(1 - \xi_2^2 + 2\lambda^2 \ln \xi_2)(\xi_2^2 + \lambda^2) - 2(\xi_2^2 - \lambda^2)^2}{2(\xi_2^2 - \lambda^2)^2} \quad (35)$$

Dikkat edilecek olursa Denklem (35), Denklem (34)'ün -1 ile çarpımına eşittir.

Denklem (33)'de $Z_m = 404$ olarak olursa kritik Reynolds sayısı

$$Re_k = \frac{808 (1-a)^3 \phi^3}{(1 - \xi^2 + 2\lambda^2 \ln \xi) \left| \xi - \frac{\lambda^2}{\xi} \right|} \quad (36)$$

olarak bulunur.

Tablo 2'de çeşitli a değerleri için hesaplanan ξ_1 ve ξ_2 değerleri ile Denklem (36)'dan elde edilen kritik Reynolds sayıları verilmiştir. [5, 6].

Tablo 2. Eş merkezli iki boru arasındaki akışlarda çeşitli a değerleri için hesaplanan ϕ , λ^2 , ξ_1 , ξ_2 , $(Re_k)_{iç}$ ve $(Re_k)_{dış}$ değerleri.

a	ϕ	λ^2	ξ_1	ξ_2	$(Re_k)_{iç}$	$(Re_k)_{dış}$
0	1	0	0	0.577	0	2100
0.1	0.846	0.215	0.192	0.751	1517	2455
0.2	0.832	0.298	0.311	0.792	1783	2459
0.3	0.826	0.378	0.411	0.825	1930	2445
0.4	0.822	0.458	0.504	0.855	2029	2425
0.5	0.820	0.541	0.592	0.883	2100	2402
0.6	0.818	0.626	0.676	0.908	2155	2378
0.7	0.817	0.715	0.759	0.933	2198	2354
0.8	0.817	0.807	0.841	0.956	2233	2331
0.9	0.816	0.902	0.921	0.979	2261	2308
1.0	0.816	1	1	1	2285	2285

KAYNAKLAR

- (1) R.W. Hanks, A.I.Ch.E.J., 9 (1963), s. 54-48.
- (2) J.Lohrenz ve F.Kurata, Ind.Eng.Chem., 52 (1960), S. 703-706.
- (3) R.B.Bird, W.E. Stewart ve E.N. Lightfoot, "Transport Phenomena", Wiley, New York, 1960.
- (4) N.W. Ryan ve M.M. Johnson, A.I.Ch.E.J., 5 (1959), s. 433-438.
- (5) R.W. Hanks ve W.F. Bonner, Ind.Eng.Chem. Fund., 10 (1971), s. 105-113.
- (6) R.W. Hanks, A.I.Ch.E.J., 26 (1980), s. 152-154.

SONUÇ

Açısal momentum artış hızının sürtünme nedeniyle yüzeyden kaybolan momentum hızına oranı olarak tanımlanan kararlılık parametresi kullanılarak değişik akış geometrileri için kritik Reynolds sayısı hesaplama yöntemi gösterilmiştir.

Dikkat edilecek olursa, eşmerkezli iki boru arasındaki akışlar için iki ayrı kritik Reynolds sayısı elde edilmiştir. Hanks ve Bonner [5] ve Hanks [6], deneysel verilerin teorik olarak hesaplanan $(Re_k)_{iç}$ değerlerine oldukça yakın olduğunu gözlemişlerdir.

Burada gösterilen yöntemi, bir takım değişikliklerle, başka akış geometrilerine de uygulamak olasıdır. Bu incelemenin yazarı tarafından ayrı merkezli iki boru arasındaki akışlar için kritik Reynolds sayısının hesaplanması üzerine çalışmalar yapılmaktadır.

SİMGELER

- A karakteristik alan
- a eşmerkezli iki boruda iç boru yarıçapının dış boru yarıçapına oranı
- b iki paralel levha arasındaki uzaklığın yarısı
- D eşdeğer çap
- F sürüklenme kuvveti
- f sürtünme katsayısı
- g yerçekimi ivmesi
- K karakteristik kinetik enerji
- P basınç
- R yarıçap
- Re Reynolds sayısı
- t zaman
- v hız
- w vortisite (Vorticity)
- Z Kararlılık parametresi
- z eksenel koordinat
- η denklem (24) ile tanımlanan boyutsuz uzaklık
- λ eşmerkezli iki boruda hızın maksimum olduğu noktadaki ξ değeri
- μ viskozite
- ξ denklem (17) ve (31) ile tanımlanan boyutsuz uzaklık
- ρ yoğunluk
- τ kayma stresi
- ϕ denklem (14) ile tanımlanan düzeltme faktörü

İNDİSLER

- k kritik
- m maksimum