

MAKSİMUM GÜÇ ÜRETİMİ

Hafit YÜNCÜ

Orta Doğu Teknik Üniversitesi Makina Mühendisliği Bölümü
06531 Ankara

(Geliş Tarihi : 22.03.2001)

Özet : Termodinamiğin birinci ve ikinci kanunlarından çıkarılan ortak sonuç “tersinmez olarak çalışan bir sistemin güç üretebilme potansiyeli, tersinmezlik hızı ile doğru orantılı olarak azalır” şeklinde ifade edilebilir. Güç üretme potansiyelindeki azalma da “ $\dot{W}_{TER} - \dot{W}$ ” kayıp-güç “ $\dot{W}_{KAYIP}$ ” olarak adlandırılır. Kayıp güç ile sistemin tersinmezlik hızı “ $\dot{I}$ ” arasındaki bağıntı da “ $\dot{W}_{KAYIP} = \dot{I}$ ” Gouy-Stodola (Bejan, 1982) teoremi olarak bilinir. Bu tanımlardan da anlaşılacağı gibi sistemin entropi üretim hızı azaltılarak (entropy minimization) sistemin üreteceği güç, olabileceği en yüksek değere (tersinir güce) yaklaştırılabilir. Bir çevrimin üretebileceği en yüksek gücü (tersinir gücü) üretebilmesi için de ısı makinasının ısı alış-verişinde bulunduğu ısı kaynaklarıyla ısı dengede olması, yani ya çevrimin çok yavaş, ya da ısı makinası ile ısı kaynakları arasındaki ısı transferi alanının çok büyük (sonsuz) olması gerekir. Bu durumda ısı makinası ile ısı kaynakları ısı dengede olacağından, ısı makinasının verimi en büyük olduğu halde, ısı makinasının ürettiği güç sıfır olacaktır. Isı makinası, ısı alış-verişinde bulunduğu ısı kaynakları ile ısı dengede olmadığı (çevrimin tersinir olmadığı) gerçek durumlarda, ısı makinasının maksimum güç üretebilmesi için gerekli şartların belirlenmesi “maksimum güç üretimi” olarak adlandırılır. Bu çalışmada güç çevrimlerinin tasarımında kullanılmak üzere geliştirilen maksimum güç üretimi yöntemi basit modellere uygulanarak tanıtılmıştır.

MAXIMUM POWER GENERATION

Abstract : The lost power is a measure of the degree of rate of thermodynamic irreversibility in a heat engine cycle. This result is represented by the Gouy-Stodola theorem. It states that the lost power is directly proportional to the rate of irreversibility. $\dot{W}_{lost} = \dot{I}$, If the temperatures in the engine cycle are equal to the reservoir temperatures, then the system would be externally as well as internally reversible and the cycle would have its maximum efficiency. However since there are no temperature differences between reservoirs and the heat engine, the rate of heat transfer is zero, and consequently the net power is also zero. On the other hand if the temperatures in the heat engine are much lower than the temperature of the high temperature reservoir and much higher than the temperature of the low temperature reservoir, the heat transfer rates are high but the thermal efficiency of engine becomes low, in the limit approaching zero, and again the power output would be zero. Thus, there must be an optimal set of the cycle temperatures in between the two extremes that produces the maximum power output for this situation. The purpose of this work is to demonstrate the methods developed in the literature for the maximisation of power generated by textbook-type heat engine cycles.

SEMBOLLER

A	Alan
C_p	Sabit basınçta özgül ısı kapasitesi
$\dot{I}$	Tersinmezlik hızı
k	Özgül ısı kapasiteleri oranı
$\dot{m}$	Kütle debisi
NTU	Isı transferi birim sayısı
P	Basınç
$\dot{Q}$	Isı akımı
T	Sıcaklık
U	Toplam ısı transferi katsayısı
$\dot{W}$	Güç
η	Verim
λ	Lagrange çarpanı
ϕ	Fonksiyon

indisler

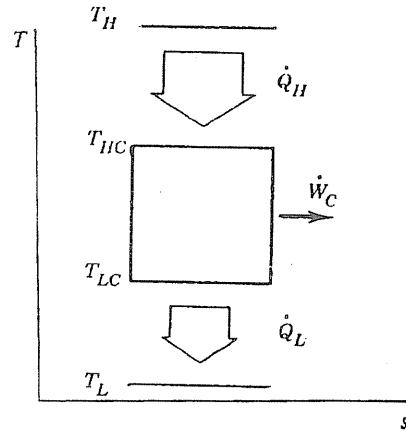
TER	Tersinir
C	Carnot çevrimi
L	Düşük sıcaklık ısı kaynağı, düşük basınç, düşük sıcaklık ısı kaynağı ile çevrim arasında
LC	Carnot çevriminde düşük sıcaklık
H	Yüksek sıcaklık ısı kaynağı, yüksek basınç, yüksek sıcaklık ısı kaynağı ile çevrim arasında
HC	Carnot çevriminde yüksek sıcaklık
opt	Maksimum güç üretimi şartlarında

CARNOT ÇEVİRİMİNDE MAKSİMUM GÜÇ ÜRETİMİ

Sıcaklıkları T_H ve T_L olan iki kaynak arasında çalışan bir iç- tersinir ısı makinesi düşünelim. Isı makinasının Şekil 1. de görüldüğü gibi en yüksek ve en düşük sıcaklıkları da T_{HC} ve T_{LC} olsun. Isı makinası ile sıcak ve soğuk kaynaklar arasındaki ısı akımı sırasıyla,

$$\dot{Q}_H = (AU)_H (T_H - T_{HC}) \quad (1)$$

$$\dot{Q}_L = (AU)_L (T_{LC} - T_L) \quad (2)$$



Şekil 1. Carnot Çevrimi

Burada $(AU)_H$ ve $(AU)_L$ sırasıyla ısı makinası ile sıcak ve soğuk kaynaklar arasındaki ısı transferi alanı ve bu alana göre tanımlanan toplam ısı transferi katsayısının çarpımıdır. Isı makinası iç- tersinir olduğundan, en yüksek ve en düşük sıcaklıklar ile ısı makinasına ısı akımları arasındaki bağıntı da

$$\frac{\dot{Q}_H}{T_{HC}} = \frac{\dot{Q}_L}{T_{LC}} \quad (3)$$

yazılabilir. Isı makinasının üreteceği güç ise

$$\dot{W}_C = \dot{Q}_H \left(1 - \frac{T_{LC}}{T_{HC}}\right) \quad (4)$$

olarak ifade edilebilir. Eşitlik (1), (2) ve (3) den ısı makinasının üreteceği iş,

$$\dot{W}_C = \frac{T_H \left(\frac{T_{LC}}{T_{HC}} - \frac{T_L}{T_H}\right) \left(1 - \frac{T_{LC}}{T_{HC}}\right)}{\frac{T_{LC}}{T_{HC}} \left(\frac{1}{(AU)_H} + \frac{1}{(AU)_L}\right)} \quad (5)$$

olarak elde edilir. Eşitlik (5) den de görülebileceği gibi, sıcaklıkları T_H ve T_L olan iki kaynak arasında çalışan iç- tersinir Carnot ısı makinasının üreteceği iş (T_{LC}/T_{HC}) oranına, $(AU)_H$ ve $(AU)_L$ parametrelerine bağlıdır. Isı makinası ile sıcak ve soğuk kaynaklar arasındaki ısı transferi

alanı ve toplam ısı transferi katsayısının sabit olduğunu varsayarsak ,

$$AU = (AU)_H + (AU)_L = C = \text{Sabit} \quad (6)$$

İç-tersinir Carnot ısı makinasından maksimum güç elde edebilmek için, Eşitlik (5) de verilen fonksiyonu , Eşitlik (6) da verilen şartlarla (constraint) maksimum yapan parametrelerin bulunması gerekir, bu da

$$\phi = \frac{T_H(\alpha - \frac{T_L}{T_H})(1-\alpha)}{\alpha(\frac{1}{(AU)_H} + \frac{1}{(AU)_L})} + \lambda((AU)_H + (AU)_L - C) \quad (7)$$

fonksiyonunun maksimize edilmesidir yani,

$$\frac{\partial \phi}{\partial \alpha} = 0, \frac{\partial \phi}{\partial (AU)_H} = 0, \frac{\partial \phi}{\partial (AU)_L} = 0 \quad (8,a,b,c)$$

Burada, $\alpha = (T_{LC}/T_{HC})$ olarak tanımlanmıştır, λ ise Lagrange çarpanı (multiplier) dır.Eşitlik (7), Eşitlik (8) de yerine konulup türevler alınır

$$\frac{T_H(\frac{T_L}{T_H} - \alpha^2)}{\alpha^2(\frac{1}{(AU)_H} + \frac{1}{(AU)_L})} = 0 \quad (9,a,b,c)$$

$$\frac{-T_H(\alpha - \frac{T_L}{T_H})(1-\alpha)\frac{1}{(AU)^2_H}}{\alpha(\frac{1}{(AU)_H} + \frac{1}{(AU)_L})^2} + \lambda = 0$$

$$\frac{-T_H(\alpha - \frac{T_L}{T_H})(1-\alpha)\frac{1}{(AU)^2_L}}{\alpha(\frac{1}{(AU)_H} + \frac{1}{(AU)_L})^2} + \lambda = 0$$

Eşitlik (9,a,b,c) denklem takımının çözümü de

$$\alpha_{opt} = \sqrt{\frac{T_L}{T_H}} \quad (10a,b)$$

$$(AU)_H = (AU)_L = (AU)/2$$

yazılabilir. Eşitlik (10),Eşitlik (5) de yerine konulursa, maksimum güç üretimi

$$\dot{W}_{C_{opt}} = \frac{(UA)}{4}(\sqrt{T_H} - \sqrt{T_L})^2 \quad (11)$$

optimum şartlarda çevrime ısı transferi de

$$\dot{Q}_{H_{opt}} = (AU)_H(T_H - T_{HC}) = \frac{1}{4}(AU)T_H(1 - \sqrt{\frac{T_L}{T_H}}) \quad (12)$$

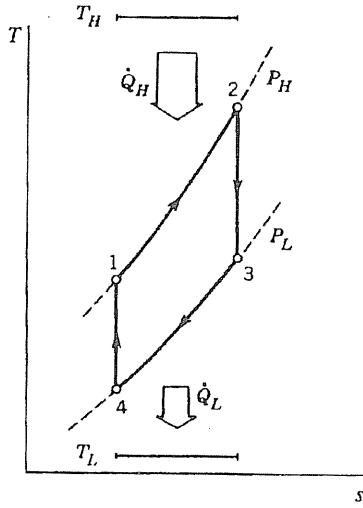
yazılabilir. Eşitlik(11)ve (12) den de optimum şartlarda çevrimin verimi η_{opt}

$$\eta_{opt} = 1 - \sqrt{\frac{T_L}{T_H}} \quad (13)$$

yazılabilir. Bu ifade Curzon -Ahlborn verimi olarak bilinir (Curzon ve Ahlborn, 1975). Curzon -Ahlborn verimi ısı makinasının maksimum verimi değildir, ısı makinasının ısı transferi alanına, ısı transferi katsayısına ve sıcak ve soğuk kaynak arasında dağılımına bağlıdır. Carnot verimi ise, ısı makinasının ısı transferi alanına ve çevrimde kullanılan maddenin termodinamik özelliklerine, dolayısı ile ısı transferi katsayısına ve bunların sıcak ve soğuk kaynak arasında dağılımına bağlı değildir.

İÇ-TERSİNİR (İDEAL) BAYTON ÇEVİRİMİNDE MAKSİMUM GÜÇ ÜRETİMİ

Yukarda belirtilen yöntem diğer çevrim modellerine de uygulanabilir. Örnek olarak Şekil 2 de görülen iç-tersinir Brayton çevrimini ele alalım. Özgül ısı kapasitesi (C_p) sabit olan ideal gaz sabit P_H basıncında (1) durumundan (2) durumuna ısıtılıyor, (3) durumundan (4) durumuna da sabit P_L basıncında soğutuluyor. Türbin ve kompresördeki genleşme ve sıkıştırma işlemleri de izentropikdir. T_1, T_2, T_3, T_4, T_L ve T_H arasındaki bağıntılar



Şekil 2. Brayton çevrimi

$$\frac{T_H - T_1}{T_H - T_2} = e^{NTU_H} = X \quad (14a,b,c,d)$$

$$\frac{T_3 - T_L}{T_4 - T_L} = e^{NTU_L} = Y$$

$$\frac{T_1}{T_4} = \left(\frac{P_H}{P_L}\right)^{(k-1)/k} = a$$

$$\frac{T_2}{T_3} = \left(\frac{P_H}{P_L}\right)^{(k-1)/k} = a$$

yazılabilir. Bu ifadede $NTU_H = (UA)_H / \dot{m}C_P$, $NTU_L = (UA)_L / \dot{m}C_P$ olarak tanımlanmış olup ısı transferi birim sayısı (number of heat transfer units) olarak adlandırılır. Eşitlik (14), den T_1, T_2, T_3 ve T_4 sıcaklıkları sırasıyla

$$T_1 = \frac{T_H(X-1) + aXT_L(Y-1)}{(XY-1)} \quad (15a,b, c,d)$$

$$T_2 = \frac{YT_H(X-1) + aT_L(Y-1)}{(XY-1)}$$

$$T_3 = \frac{YT_H(X-1) + aT_L(Y-1)}{a(XY-1)}$$

$$T_4 = \frac{T_H(X-1) + aXT_L(Y-1)}{a(XY-1)}$$

elde edilir. Çevrimin ürettiği iş

$$\dot{W} = \dot{m}C_P[(T_2 - T_3) - (T_1 - T_4)] \quad (16)$$

olacağından T_1, T_2, T_3 ve T_4 sıcaklıkları Eşitlik (16) da yerine konulursa, çevrimin üreteceği güç

$$\dot{W} = \dot{m}C_P(T_H - aT_L) \left[\frac{(X-1)(Y-1)}{(XY-1)} \right] \left(\frac{a-1}{a} \right) \quad (17)$$

olarak bulunur.

$(AU)_H + (AU)_L = (AU) = C = \text{sabit}$ şartlarında Brayton çevrimin üreteceği gücün maksimum olabilmesi için

$$\phi = \dot{m}C_P(T_H - aT_L) \left[\frac{(X-1)(Y-1)}{(XY-1)} \right] \left(\frac{a-1}{a} \right) + \lambda (\ln X + \ln Y - \ln C) \quad (18)$$

fonksiyonunun maksimum olması gerekir. Eşitlik (24) deki fonksiyonun a, X ve Y ye göre türevleri sıfıra eşitlenirse

$$\dot{m}C_P \left(\frac{1}{a^2} T_H - T_L \right) \frac{(X-1)(Y-1)}{(XY-1)} = 0 \quad (19a,b,c)$$

$$\dot{m}C_P(T_H - aT_L) \left[\frac{a-1}{a} \right] \frac{(Y-1)^2}{(XY-1)^2} + \frac{\lambda}{X} = 0$$

$$\dot{m}C_P(T_H - aT_L) \left[\frac{a-1}{a} \right] \frac{(X-1)^2}{(XY-1)^2} + \frac{\lambda}{Y} = 0$$

elde edilir. Eşitlik (19) da verilen denklem takımının anlamlı bir çözümü

$$X = Y = \frac{1}{2} \frac{(UA)}{\dot{m}C_P} \quad (20a,b)$$

$$a_{opt} = \sqrt{\frac{T_H}{T_L}}$$

elde edilebilir. Eşitlik (20) Eşitlik (17) de yerine konulur ve tekrar düzenlenirse maksimum güç üretimi

$$\dot{W}_{opt} = \frac{\dot{m}C_P}{(UA)} (UA) (\sqrt{T_H} - \sqrt{T_L})^2 \left[\frac{e^{\frac{1}{2} \frac{(UA)}{\dot{m}C_P}} - 1}{e^{\frac{1}{2} \frac{(UA)}{\dot{m}C_P}} + 1} \right] \quad (21)$$

olarak elde edilebilir. $(e^{\frac{1}{2\dot{m}C_p}(UA)} - 1)/(e^{\frac{1}{2\dot{m}C_p}(UA)} + 1) = \tanh(\frac{1}{4\dot{m}C_p}(UA))$ olduğundan maksimum güç üretimi

$$\dot{W}_{opt} = (UA)(\sqrt{T_H} - \sqrt{T_L})^2 \frac{\dot{m}C_p}{(UA)} \tanh(\frac{1}{4\dot{m}C_p}(UA)) \quad (22)$$

olarak ifade edilebilir. Maksimum güç üretimi şartlarında çevrimin verimi de

$$\eta_{opt} = 1 - \frac{1}{a} = 1 - \left(\frac{P_L}{P_H}\right)^{(k-1)/k} = 1 - \sqrt{\frac{T_L}{T_H}} \quad (23)$$

olarak ifade edilebilir. Bu ifadeden de görülebileceği gibi maksimum güç üretimi şartlarında çevrimin verimi ısı transferi alanının ve ısı transferi katsayısının sıcak ve soğuk kaynaklar arasında dağılımına bağlı değildir ve Curzon - Ahlborn verimine eşittir.

Kütle debisi arttıkça ($\dot{m} \rightarrow \infty$), $(\dot{m}C_p / (UA)) \tanh((UA)/4\dot{m}C_p)$ ifadesi $\rightarrow 1/4$, çevrim de Carnot çevrimi olacağından yüksek kütle debilerinde maksimum güç üretimi Eşitlik (22) den

$$\dot{W}_{opt} = \frac{(UA)}{4} (\sqrt{T_H} - \sqrt{T_L})^2 \quad (24)$$

olarak elde edilir.

REGENERATİF BRAYTON ÇEVİRİMİNDE MAKSİMİM GÜÇ ÜRETİMİ

Şekil 3.de görülen regeneratif Brayton çevriminde $T_1, T_2, T_3, T_4, T_x, T_y, T_H$ ve T_L arasındaki bağıntılar benzer olarak

$$\frac{T_H - T_x}{T_H - T_2} = e^{NTU_H} = X \quad (25a,b,c,d,e,f)$$

$$\frac{T_y - T_L}{T_4 - T_L} = e^{NTU_L} = Y$$

$$\frac{T_2}{T_3} = \left(\frac{P_H}{P_L}\right)^{(k-1)/k} = a$$

$$\frac{T_1}{T_4} = \left(\frac{P_H}{P_L}\right)^{(k-1)/k} = a$$

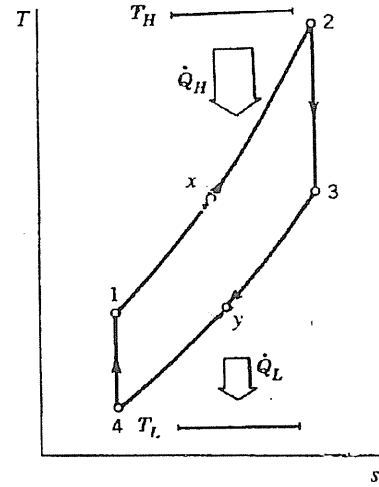
$$T_x = T_3$$

$$T_y = T_1$$

çevrimin üreteceği güç ise

$$\dot{W} = \dot{m}C_p(a-1) \left[\frac{T_H(X-1)}{(aX-1)} - \frac{T_L(Y-1)}{(Y-a)} \right] \quad (26)$$

yazılabilir.



Şekil 3. Regeneratif Brayton çevrimi

$(AU)_H + (AU)_L = (AU) = C = \text{sabit}$, şartlarında güç üretimini maksimum yapan a, X ve Y değerleri, benzer yöntemle:

$$X = Y = \frac{1}{2} \frac{(UA)}{\dot{m}C_p} \quad (27a,b)$$

$$a = \frac{\sqrt{\frac{T_H}{T_L}} + 1}{X + \sqrt{\frac{T_H}{T_L}}}$$

olarak bulunabilir. Eşitlik (27) Eşitlik (26) da yerine konulduğunda maksimum güç üretimi ve maksimum güç üretimi şartlarında çevrimin verimi de yine,

$$\dot{W}_{opt} = (UA)(\sqrt{T_H} - \sqrt{T_L})^2 \frac{\dot{m}C_p}{(UA)} \tanh\left(\frac{1}{4} \frac{(UA)}{\dot{m}C_p}\right) \quad (28)$$

$$\eta_{opt} = 1 - \frac{1}{a} = 1 - \left(\frac{P_L}{P_H}\right)^{(k-1)/k} = 1 - \sqrt{\frac{T_L}{T_H}} \quad (29)$$

olarak bulunur. Kütle debisi arttıkça ($\dot{m} \rightarrow \infty$), çevrim Ericsson çevrimine dönüşeceğiinden maksimum güç üretimi, limit alınarak

$$\dot{W}_{opt} = \frac{(UA)}{4} (\sqrt{T_H} - \sqrt{T_L})^2 \quad (30)$$

şeklinde ifade edilebilir.

SONUÇ

Bu çalışmada Carnot, Brayton ve regeneratif Brayton çevrimlerinde maksimum güç üretimi için şartlar incelenmiştir. Bu çevrimlerde maksimum güç üretebilmek için ısı transferi alanı ile toplam ısı transferi katsayısı çarpımının, sıcak ısı kaynağı ile

soğuk ısı kaynağı arasında eşit olarak paylaşılması gerektiği gösterilmiştir (Bejan, 1988; Bejan, 1996; Wu ve Kiang, 1991). Bu şartlarda yukarıda incelenen çevrimlerin verimi de Curzon-Ahlborn verimine eşit olmaktadır.

KAYNAKLAR

A.Bejan , *Entropy Generation Through Heat and Fluid Flow*, Wiley, New York, 1982.

F.L.Curzon and B.Ahlborn, Efficiency of a Carnot Engine at Maximum Power Output, *Am.J.Phys.*, 43, pp.22-24., 1975.

A.Bejan, *Advanced Engineering Thermodynamics*, Wiley, New York, 1988.

A.Bejan, Models of Power Plants That Generate Minimum Entropy while Operating at Maximum Power., *Am.J. Phys.*, 64, pp.1054-1059, 1996.

C.Wu and R.L.Kiang , Power Performance of Nonisentropic Brayton Cycle, *Journal of Engineering for Turbines and Power.*, 113, pp.501-503, 1991.