



TERSİNMEZ CARNOT MOTORUNUN TERMOEKONOMİK ENİYİLEMESİ*

Yalçın A. GÖĞÜŞ

ODTÜ Havacılık Mühendisliği Bölümü, Ankara

E-mail : ygogus@metu.edu.tr

(Geliş Tarihi: 09.09.2002)

Özet: Sonlu zaman termodinamiği tersinmez Carnot motorunu iki ya da üç tersinmezlik ögesi yardımıyla modeller ve bu modelin en büyük güçte çalışma şartlarını inceler. Bu makalede aynı modelin termoeconomik eniyilemesinin sonuçları verilmiş ve ısısın fiyatının çok küçülmesiyle sonlu zaman termodinamiği sonuçlarının, çok büyümesiyle tersinir Carnot sonuçlarının elde edildiği gösterilmiştir. Ayrıca tersinmezlik parametrelerinin en uygun değerlerinin ekonomik parametrelerle ilişkisi ve uygulama olanakları tartışılmıştır.

Anahtar kelimeler: Termoeconomik, Termoeconomik Eniyileme, Sonlu Zaman Termodinamiği, Üç Tersinmezlikli Carnot Motoru.

THERMOECONOMIC OPTIMIZATION OF IRREVERSIBLE CARNOT ENGINE

Abstract: Finite time thermodynamics utilizes a model of irreversible Carnot engine with two or three irreversibilities and maximizes its power output. In this paper results for thermoeconomic optimization of the same model engine are given and it is shown that for vanishing fuel cost the results of finite time thermodynamics, for very high cost the results of reversible Carnot engine are obtained. Furthermore the dependence of the optimized design parameters on economic parameters is discussed.

Keywords: Thermoeconomics, Thermoeconomic Optimization, Finite Time Thermodynamics, Carnot Engine With Three Irreversibilities.

SEMBOLLER (ve ilgili eşitlikler)

$\dot{C}$	Gider hızı [TL/s]
$\dot{C}_c$	Sabit gider hızı [TL/s]
c_i	İç tersinmezliği azaltmanın özgül fiyatı (Z_i/Z_L)/y (10)
c_z	Özgül fiyatların oranı (Z_h/Z_L)
M	$A'_p Z_L / (c_f T_L)$ Boyutsuz yatırım gideri (23)

N	$\dot{C}_c / (\Lambda_L T_L c_f)$ Boyutsuz sabit gider (24)
$P_{1...4}$	Boyutsuz ifadeler (19)....(22)
Q	Isı [kJ]
R_i	İç tersinmezlik direnci [Ks/kJ]
SZT	Sonlu Zaman Termodinamiği
T	Mutlak sıcaklık [K]
U	Isı geçirgenliği [kW/m ² K]
W	Güç [W]

* Değerli bilim adamı Prof. Johannes Straub'a (T.Ü. Münih) 70. yaş günü armağanıdır.

x	Λ_h / Λ_L	
y	R_i / R_L	
Z	Yatırım [TL]	
Z	Özgöl yatırım [TL K/kW]	
β	Boyutsuz değişken	(26)
Λ	Toplam ısı geçirgenliği [kW/K]	
η	Verim	(34)(35)
ψ	Amaç fonksiyonu	(1)
τ	Mutlak sıcaklık oranı (T_h/T_L)	(5)
τ_c	Mutlak sıcaklık oranı, tersinir bölge (T_2/T_1)	(6)
İndisler ve Üsler		
I, II	Birinci ve ikinci yasa	(34)(35)
eu	Enuygun	
f	Yakıta ilişkin	
i	İş tersinmezliğe ilişkin	
h	Kaynak sıcaklığında	
L	Çevre sıcaklığında	
z	Yatırıma ilişkin	
.	Hız [1/s]	
-	Boyutsuz	

GİRİŞ VE MODEL

Termodinamik, ondokuzuncu yüzyılda motorların verimini artırma çalışmalarının fizik araştırmalarıyla birleşmesiyle, enerji ve entropi kuramlarının anlaşılmasıyla bilim dalı niteliğini kazandı. Yirminci yüzyılın ilk yarısında entropi kuramının mühendislik uygulamaları, ekserji analizini gündeme getirdi. Yirminci yüzyılın ikinci yarısında ise uygulamalı termodinamiğin başlıca iki gelişmesi, tersinmez sistemleri eniyilemeyi amaçlayan Sonlu Zaman Termodinamiği (SZT) ve tersinmezliğin azaltılması için gerekli yatırımı bunun sağlayacağı yararlar dengeleyen termoekonomi oldu.

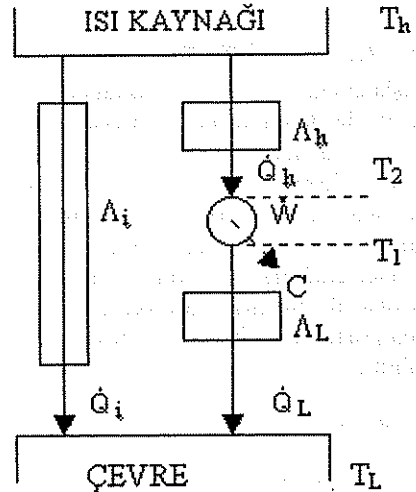
Son yirmi yılda karmaşık enerji sistemlerinin termoekonomik sayısal eniyilemesi etraflıca incelendiye de genel ve basit motor modellerinin termoekonomik eniyilemesi bildiğimiz kadarıyla ele alınmamıştır. SZT'de kullanılan iki dış tersinmezlikli model ve Bejan (1995) tarafından incelenen, iç tersinmezliği de ilave bir ısı sızmasıyla hesaba katan, üç tersinmezlikli model Şekil 1'de görülmektedir. Her bir tersinmezliğin azaltılması yatırım ve bu yatırımın zaman değeri nedeniyle üretilen gücün maliyetinde artış meydana getirir. Bu çalışmada termoekonomik eniyileme, motorun ürettiği gücün maliyetini (c_w) enküçültmeyle gerçekleştirilecektir.

Bu yöntemle elde edilen sonuçlar SZT'nin sonuçlarını, ısı fiyatının çok küçük olması özel durumu olarak, içermektedir. Sonuçların önemli yararı ise ısı değiştirgeçlerinin büyüklüğünün ve iç tersinmezlik etkenlerinin enuygun tasarım

değerlerini vermesi, bu tasarım değerlerinin ekonomik parametrelere bağımlılığını ortaya koymasındır.

Şekil 1'de, T_h kaynak sıcaklığında Q_h ısı motorla toplam geçirgenliği $\Lambda_h = A_h U_h$ olan ısı değiştirgeçinden geçerek T_2 sıcaklığında ulaşır. Modelin C tersinir bölgesinde ($Q_h - Q_L$) ısı işe dönüştürülür. Bu dönüşümde atılan Q_L ısı T_1 sıcaklığında C bölgesini terk eder ve toplam geçirgenliği Λ_L olan ısı değiştirgeçinden geçerek T_L sıcaklığındaki çevreye ulaşır.

İki ısı geçişinin tersinmezliklerine ilaveten motorda meydana gelecek diğer tersinmezlikleri T_2 sıcaklığından T_1 sıcaklığına düşürülen ilave bir miktar ısının (Q_i) ekserjisinin kaybedilmesi olarak modellemek doğru olur. Fakat bu model türetilen eşitlikleri çok karmaşık hale koyacağından Şekil 1'de görüldüğü gibi, T_h ve T_L sıcaklıkları arasında tersinmezlik ögesi kullanılacaktır.



Şekil 1. Üç tersinmezlikli Carnot motoru modeli

AMAÇ FONKSİYONUN TANIMI VE HESABI

Birim zaman için toplam giderler $\dot{\Psi}$ ile, üretilen iş $\dot{W}$ ile ve T_h sıcaklığındaki ısının birim fiyatı c_i ile gösterilir ve iş özgül maliyeti c_w ısı fiyatı yardımıyla boyutsuz yapılırsa, amaç fonksiyonu elde edilir:

$$\bar{\Psi} = \dot{\Psi} / (\dot{W} c_i) \quad (1)$$

Toplam giderler,

$$\dot{\Psi} = \dot{C}_i + \dot{C}_z + \dot{C}_o \quad (2)$$

sırasıyla yakıt giderlerinden, yatırım giderlerinden ve sabit giderlerden (örneğin yer kirası, işçilik ücreti) oluşur. Amaç fonksiyonunu eniyilemek için bu büyüklük tasarım (bağımsız) değişkenler ve diğer sabit parametreler cinsinden ifade edilmeli ve tasarım değişkenlerine göre türevleri sıfıra eşitlenmelidir. Isı değiştirgeçlerinin bağımsız değişkenleri toplam ısı geçirgenliğidir: Λ_h ve Λ_L . Eşitlik 1'deki üretilen iş (birim zaman söz konusu olduğundan $\dot{W}$) Eşitlik 2'deki $\dot{C}_f$ ve $\dot{C}_z$ (dolayısıyla $\dot{C}_z$ yi belirleyen yatırım Z) bu bağımsız değişkenler cinsinden ifade edilir:

$$Z_h = \Lambda_h \cdot z_h \quad Z_L = \Lambda_L \cdot z_L \quad (3), (4)$$

Burada z birim ısı geçirgenliği fiyatını göstermektedir. Sabit parametreler ve bağımsız değişkenler, çevre şartlarına yakın olan büyüklükler yardımıyla boyutsuz ifade edilir:

$$\tau = T_h / T_L \quad \tau_c = T_2 / T_1 \quad (5), (6)$$

$$x = \Lambda_h / \Lambda_L \quad c_z = z_h / z_L \quad (7), (8)$$

Başlangıçta τ ve c_z sabit parametreler, x , τ_c ve Eşitlik 9 ile tanımlanan y tasarım değişkenleri olarak kabul edilecektir. τ_c tersinir Carnot motoru bölgesinin çalışma hızı tarafından belirlenmektedir; işletme değişkeni olarak da düşünülebilir. İkinci aşamada c_z , c_i ve τ parametreleri de değişken olarak incelenebilir. Motorun iç tersinmezliğinin ölçüsü olan R_i bağımsız değişkeni ve bunun sabit parametre olan birim fiyatı c_i de boyutsuz olarak ele alınmalıdır:

$$y = R_i / (1 / \Lambda_L) = R_i \cdot \Lambda_L \quad (9)$$

$$Z_i / (\Lambda_L \cdot z_L) = c_i \cdot y \quad (10)$$

Burada Z_i , motorun ısı değiştirgeçleri dışındaki maliyetidir ve iç tersinmezlikle ters orantılı olduğu varsayılmıştır. Sabit parametre olarak düşünülen c_i ise Z_i ve R_i hakkındaki bilgilerden, Eşitlik 10'un türevi yardımıyla hesaplanabilir:

$$c_i = (\partial Z_i / \partial R_i) / (z_L \cdot \Lambda_L^2) \quad (11)$$

Bir Z yatırımının motor ömrü boyunca birim çalışma süresine dağılan maliyeti, A'_p katsayısıyla hesaplanabilir:

$$\dot{C}_z = A'_p (\Lambda_L \cdot z_L + \Lambda_h \cdot z_h + c_i \cdot y \cdot \Lambda_L z_L) \quad (12)$$

A'_p katsayısı ve termoekonomi hakkında tamamlayıcı bilgi Bejan, vd. (1996) da ve mühendislik ekonomisine ilişkin Türkçe kitaplarda bulunabilir

Aşağıdaki eşitliklerin türetilmesi hakkında tamamlayıcı bilgi Ek'te verilmiştir. Eşitlik 2'deki ısı giderleri için:

$$\dot{C}_f = \dot{Q}_t \cdot c_f = c_f \{ \Lambda_h (T_h - T_L) + \Lambda_i (T_h - T_2) \} \\ = c_f \Lambda_L T_L \{ x [\tau - \tau_c (T_1 / T_L)] + [(\tau - 1) / y] \} \quad (13)$$

Bazı ara işlemlerle (T_1 / T_L) büyüklüğü için elde edilen

$$T_1 / T_L = (x \cdot \tau + \tau_c) / [(x + 1) \tau_c] \quad (14)$$

eşitliği bir önceki denklemde yerine konunca,

$$\dot{C}_f = c_f \cdot T_L \cdot \Lambda_L [(\tau - \tau_c) / (x + 1) + (\tau - 1) / y] \quad (15)$$

Üretilen birim iş için

$$\dot{W} = \dot{Q}_h - \dot{Q}_1 = T_L \cdot \Lambda_L [(T_1 / T_L) - 1] (\tau_c - 1) \quad (16)$$

ve bu eşitlikte Eşitlik 14 kullanılarak şu bağıntı bulunur:

$$\dot{W} = \Lambda_L \cdot T_L (\tau_c - 1) (\tau - \tau_c) x / [(x + 1) \tau_c] \quad (17)$$

Elde edilen (12), (13), (17) eşitlikleri Eşitlik 2'de ve 1'de yerlerine konulunca, boyutsuz büyüklüklerden oluşan şu amaç fonksiyonu elde edilir:

$$\bar{\Psi} = \tau_c \cdot P_1 / (\tau_c - 1) \quad (18)$$

$$P_1 = 1 + P_2 (x + 1) / (\tau - \tau_c) \quad (19)$$

$$P_2 = (\tau - 1) / (x \cdot y) + M P_3 + N / x \quad (20)$$

$$P_3 = c_z + P_4 / x ; P_4 = 1 + c_i y \quad (21), (22)$$

$$M = (A'_p z_L) / (c_f T_L) \quad (23)$$

$$N = \dot{C}_c / (\Lambda_L T_L c_f) \quad (24)$$

ENİYİLEME SONUÇLARI

Çalışma Hızını Belirleyen Sıcaklık Oranının (τ_c) Enuygun Değeri

Carnot motorunun hızı $\dot{Q}_h$ ve $\dot{Q}_L$ 'yi, bunlar da T_2 ve T_1 sıcaklıkları, dolayısıyla τ_c

değişkenini belirler. $\bar{\Psi}$ amaç fonksiyonunu en küçük yapan çalışma hızı, dolayısıyla τ_c , en uygun olandır, $\tau_{c,eu}$ olarak gösterilecektir:

$$\frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \tau_c} = \left(\frac{1}{\tau_c - 1} - \frac{\tau_c}{(\tau_c - 1)^2} \right) P_1 + \frac{\tau_c}{(\tau_c - 1)} \left\{ 0 + \frac{x+1}{(\tau - \tau_c)^2} P_2 \right\} = 0 \quad (25)$$

Türev alma ve sadeleştirme sonunda şu eşitlik elde edilir:

$$\beta = P_2(x+1) \quad (26)$$

$$\tau_c^2(\beta - 1) + 2\tau\tau_c - (\tau_2 + \beta\tau) = 0 \quad (27)$$

Eşitlik 27'nin çözümünü enuygun sonucu verir:

$$\tau_{c,eu} = \frac{\tau}{\beta - 1} \left[\sqrt{1 + \frac{(\tau + \beta)(\beta - 1)}{\tau}} - 1 \right] \quad (28)$$

Isı Değiştirgeçleri Toplam Geçirgenlik Oranının (x) Enuygun Değeri

Amaç fonksiyonunun x'e göre türevi sıfırlanır:

$$\frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial x} = \frac{\tau_c}{(\tau_c - 1)(\tau - \tau_c)} F_2 + \frac{(x+1)\tau_c}{(\tau_c - 1)(\tau - \tau_c)} \left[-\frac{\tau - 1}{y} \frac{1}{x^2} - \frac{M(1+c_i y)}{x^2} - \frac{N}{x^2} \right] = 0 \quad (29)$$

Basitleştirme işlemlerinden sonra:

$$\begin{aligned} (Mc_x) x^2 + \left[\frac{\tau - 1}{y} + M(1+c_i y) + N \right] \\ - \left[\left(\frac{\tau - 1}{y} \right) + M(1+c_i y) + N \right] x \\ - \left[\frac{\tau - 1}{y} + M(1+c_i y) + N \right] = 0 \end{aligned} \quad (30)$$

Bu denklem x'e göre çözülerek en uygun değer bulunur:

$$x_{eu} = \sqrt{\frac{\tau - 1}{Mc_z y} + \frac{1+c_i y}{c_z} + \frac{N}{Mc_z}} \quad (31)$$

İç Tersinmezlik Oranının (y) En Uygun Değeri

Amaç fonksiyonunun y'ye göre türevi sıfırlanır:

$$\frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial y} = 0 \quad (32)$$

Türev alma ve basitleştirmelerden sonra şu çözüm elde edilir:

$$y_{eu} = \sqrt{\frac{\tau - 1}{Mc_i}} = \sqrt{\frac{c_f \cdot T_L}{A^p \cdot Z_L \cdot c_i} (\tau - 1)} \quad (33)$$

En İyi Tasarımda Verimler

Maliyetin yalnız ısıya ilişkin terimi alınıp işin ısıya oranı, $\dot{W}/(\dot{\Psi}_{IS1}/c_f)$ yazılır ve enerji (birinci yasa) verimi bulunur:

$$\eta_I = \left\{ \frac{\tau_c}{\tau_c - 1} \left[1 + \frac{x+1}{y \cdot x} \cdot \frac{\tau - 1}{\tau - \tau_c} \right] \right\}^{-1} \quad (34)$$

Enerji verimi ifadesinin tersinir motor verimine $((\tau - 1)/\tau)$ oranı ekserji (ikinci yasa) verimidir:

$$\eta_{II} = \left\{ \left[1 + \frac{x+1}{y \cdot x} \cdot \frac{\tau - 1}{\tau - \tau_c} \right] \frac{\tau_c}{\tau} \cdot \frac{\tau - 1}{\tau_c - 1} \right\}^{-1} \quad (35)$$

Bu verim ifadelerinde τ_c , x ve y'nin en uygun değerleri konularak eniyilenmiş tersinmez Carnot motorunun verim değerleri bulunur.

ÖZEL İKİ ÇÖZÜM

Sonlu Zaman Termodinamiği (SZT)

Yatırım (Z) çok pahalı ya da paranın zaman değeri (A_p') çok büyük ise, M çok büyüktür. Isı fiyatının çok küçük olması da ($c_f \rightarrow 0$) aynı etkiyi yapar. Bu durumda β sonsuza gider.

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \tau_{c,eu} = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \sqrt{\tau \cdot \frac{1+\frac{\tau}{\beta}}{1-\frac{1}{\beta}}} = \sqrt{\tau} \quad (36)$$

Bunun anlamı, yatırımın en iyi değerlendirilmesi için birim zamanda üretilen iş, verimi ikinci derecede önemseyerek, en büyük yapılmalıdır. Bulunan sonuç SZT sonucuyla örtüşmektedir. Bu özel durum için, Eşitlik 31 şu şekli alır:

$$\lim_{M \rightarrow \infty} x_{eu} = \sqrt{\frac{1+c_j y}{c_z}} \quad (37)$$

İç tersinmezlik yok sayılırsa, iyileştirmesi için yatırım gerekmez ve c_j y grubu sıfır olur:

$$x_{eu} = \sqrt{\frac{1}{c_z}}; \quad \frac{\Lambda_h}{\Lambda_L} = \sqrt{\frac{z_L}{z_h}} \quad (38), (39)$$

Bu incelemede, daha önceki benzer çalışmalardan farklı olarak $\Lambda_L + \Lambda_h$ ya da toplam yatırımın sabit olması şartı kullanılmıyor. Eniyilenmiş motor için bu değer, birim fiyatlar kullanılarak hesaplanıyor. Ancak gene de Eşitlik 39, Bejan (1995)'in Eşitlik 8.22'si ile aynıdır. Isı değiştirgeci birim fiyatlarının aynı olması durumunda ($c_z=1$)

$$\Lambda_h = \Lambda_L \quad (40)$$

bulunur.

Tersinir Motor

Yakıt fiyatının çok yüksek ($c_f \rightarrow \infty$) ve yatırımın ya da paranın zaman değerinin çok ucuz olması ($A'_p \rightarrow 0, Z \rightarrow 0$) durumunda:

$$\begin{array}{lll} M \rightarrow 0 & N \rightarrow 0 & y \rightarrow \infty \\ P_2 \rightarrow 0 & \beta \rightarrow 0 & \tau_{c,eu} \rightarrow \tau \end{array}$$

sonucuna varılmaktadır. Burada y için Eşitlik 33 kullanılmıştır.

TARTIŞMA VE BULGULAR

Sonlu Zaman Termodinamiğinin (SZT) dayandığı iki ya da üç tersinmezlikli Carnot motoru modeli güç sistemlerinin termoeconomik eniyilemesi için de uygun bir başlangıç modelidir. Termoeconomik eniyileme sonuçları, yatırımın çok değerli ($A'_p \rightarrow \infty$) ya da ısının çok ucuz ($c_f \rightarrow 0$)

olması özel durumunda SZT'nin, (gücü en büyük yapan) eniyileme sonuçlarını içermektedir.

Elde edilen genel sonuçlar diğer uç durumda, ısının çok pahalı ya da yatırımın çok ucuz olması durumunda, tersinir Carnot motoru için elde edilecek sonuçları içermektedir.

Boyutsuz iş fiyatını veren amaç fonksiyonunun değeri Eşitlik (18)-(24) ile belirlenir. Birinci çarpan $\tau_c/(\tau_c - 1)$, tersinir bölgenin enerji verimidir. $\tau_c < \tau$ ve ikinci çarpan birden büyük olduğundan maliyet her zaman ideal değerden büyük olur. Çalışma hızı yavaşladıkça ($\tau_c \rightarrow \tau$) birinci çarpan entropi kuramının belirlediği ideal değere, $\tau/(\tau-1)$, yaklaşır. O halde τ ve τ_c birinci derecede önemli parametrelerdir. En uygun çalışma hızı $\tau_c \rightarrow \tau_{c,eu}$ ile belirlenir ve bu değer β 'ya, dolayısıyla x 'e (ısı değiştirgeçlerinin geçirgenliklerinin oranı) ve P_2 'ye bağlıdır. İkinci çarpan $\tau_c \rightarrow \tau$ için P_2 'ye bağlı olarak büyür çünkü P_2 parametresi x , M , N ve y 'ye (dolayısıyla yatırım giderlerine) bağlıdır. O halde x , M , N ve y ikinci derecede en önemli parametrelerdir. Amaç fonksiyonunu üçüncü derecede etkileyen parametreler ise c_j ve c_z 'dir.

Bu çalışmayı izleyecek çalışmalarda şu üç konunun araştırmaya değer olduğu düşünülmektedir. Birincisi düşük basınçlı buhar çevrimlerinde örneğin nükleer santrallerde boyutsuz parametrelerin amaç fonksiyonuna etkileri ve kendilerinin etkilendikleri boyutlu parametrelere duyarlılıkları, uygulama değerleri civarında sayısal olarak incelenebilir. İkincisi, burada Carnot motoru için gerçekleştirilen boyutsuz termoeconomik eniyileme, basitleştirilmiş diğer çevrimlere özellikle gaz türbünü çevrimine uygulanabilir.

Üçüncü ilginç uygulama ise tersinir Carnot motoruna dayanan ekserji kavramının ekonomiyi de içerecek şekilde (örneğin ekserji olarak) genişletilmesidir. Ekonomik şartların burada açıklanan yöntemle empoze ettiği, ısının en yararlı işe dönüştürülür miktarı ekserjinin yerine daha gerçekçi bir değer ölçüsüdür. Bu büyüklüğün analizi madde akımlarını da içerecek şekilde uygulanabilir. Son olarak enerji bazında yapılan ekonomik analizin benzeri ekserji bazında yapılabilir.

TEŞEKKÜR

Alexander von Humboldt Vakfına desteği için, ayrıca Prof. G. Tsatsaronis'e ve Y.Müh. B. Narin'e yardımlarından dolayı teşekkür ederim.

KAYNAKLAR

Bejan, A., *Entropy Generation Minimization*, CRC's Mechanical Engineering Series, 1995.

Bejan, A., Tsatsaronis, G., Moran, S M., *Thermal Design and Optimization*, John Wiley Inc., 1996

Bazı Terimlerin İngilizce Karşılıkları

- eniyileme : optimization
- enküçültme : minimization
- eniyi : optimum
- entropi kuramı : Second Law of Thermodynamics
- enerji kuramı : First Law of Thermodynamics
- ısı değıştirgeci : heat exchanger

EK: BAZI EŞİTLİKLERİN TÜRETİLİŞİ

* Eş. (13) için

$$\begin{aligned} \dot{Q}_t &= \dot{Q}_h + \dot{Q}_f = \Lambda_h (T_h - T_2) + \Lambda_f (T_h - T_L) \\ &= \Lambda_L T_2 (\Lambda_h / \Lambda_L) (T_h / T_L - (T_2 / T_1) * (T_h / T_L)) \\ &\quad \Lambda_L T_L (\tau - 1) \Lambda_f / \Lambda_L \end{aligned}$$

Eş. (5), (6) ve (7) kullanılarak Eş. (13)

* Eş. (14) için

$$\begin{aligned} \dot{Q}_h / T_2 &= \dot{Q}_L / T_1 ; \\ (T_h - T_2) \Lambda_h / T_2 &= (T_1 - T_L) \Lambda_L / T_1 \\ T_h / T_L - (T_2 / T_1) \cdot (T_1 / T_L) &= \\ &= (\Lambda_L / \Lambda_h) \cdot (T_2 / T_1) (T_1 / T_L - 1) \end{aligned}$$

Eş. (5), (6), (7) ile

$$\tau - \tau_c (T_1 / T_L) = [(T_1 / T_L) \cdot (T_2 / T_1) - (T_2 / T_1)] / x ;$$

$$\tau + (\tau_c / x) = (T_1 / T_L) \tau_c [(1/x) + 1] ;$$

Bu eşitlikten T_1 / T_L için Eş. (14) bulunur.

* Eş. (18)....(22) için

Önce Eş. (2) Eş. (1)'e ve ilgili parametreler diğer eşitlikler yardımıyla bulunan denklemdeki yerlerine konularak şu ifade bulunur:

$$\begin{aligned} \bar{\Psi} &= \{ c_f [T_L (\tau - 1) \Lambda_L / y + \Lambda_L T_L x (\tau - \tau_c) / (x+1)] \\ &\quad + A'_p [z_h \Lambda_h + \Lambda_L z_L + z_i] + \dot{C}_c \} / \\ &\quad \{ c_f \Lambda_L T_L [(\tau_c - 1) (\tau - \tau_c) / \tau_c] x / (x+1) \} \end{aligned}$$

Birinci büyük parantezdeki köşeli parantezler açılınca 6 terim oluşur. Bunların her biri bu eşitliğin ikinci büyük parantezi ile bölününce 6 terimin toplamı elde edilir:

$$\Psi = \sum_i \Psi_i$$

$$\bar{\Psi}_1 = [(\tau - 1) / (\tau_c - 1)] [1/y] [(x+1)/x] [\tau_c / (\tau - \tau_c)]$$

$$\bar{\Psi}_2 = \tau_c / (\tau_c - 1)$$

$$\bar{\Psi}_3 = [A'_p z_L / (c_f T_L)] [c_2 (x+1)] [\tau_c / (\tau_c - 1)] / (\tau - \tau_c)$$

$$\bar{\Psi}_4 = [A'_p z_L / (c_f T_L)] [(x+1)/x] [\tau / (\tau_c - 1)] / (\tau - \tau_c)$$

$$\bar{\Psi}_5 = [A'_p z_L / (c_f T_L)] [c_1 y / (\tau - \tau_c)] [(x+1)/x] \cdot [\tau_c / (\tau_c - 1)]$$

$$\bar{\Psi}_6 = [\dot{C}_c / (c_f \Lambda_L T_L)] [(x+1)/x] [\tau_c / (\tau_c - 1)]$$

Bu altı terimdeki ortak gruplar parantez dışına alınınca Eş. (18).....(24) bulunur.

* Eş. (27) için

Eş. (25) basitleştirilir:

$$\frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \tau_c} = \left(- \frac{P_1}{(\tau_c - 1)^2} \right) + \frac{\tau_c}{(\tau_c - 1)} \left\{ \frac{x+1}{(\tau - \tau_c)^2} P_2 \right\} = 0$$

Her iki taraf ($\tau_c = 1$ ve $\tau_c = \tau$ dışında tutularak) $(\tau - \tau_c)^2$ ve $(\tau_c - 1)^2$ ile çarpılır ve P_1 'in ifadesi yerine konularak basitleştirilir:

$$-(\tau - \tau_c)^2 \{ 1 + P_2 \cdot (x+1) / (\tau - \tau_c) \} + (\tau_c - 1) \tau_c (x+1) P_2 = 0$$

$P_2(x+1) = \beta$ kısaltmasıyla ve basitleştirmeyeyle:

$$\tau_c^2 (\beta - 1) + 2\tau \tau_c - (\tau^2 + \beta \tau) = 0$$

çözüm Eş. (27)'dir.

* Eş. (30) için

Eş. (29) $(\tau_c - 1)(\tau - \tau_c) / \tau_c$ ile çarpılıp basitleştirilir:

$$P_2 - [(\tau - 1) / y + M(1 + c_1 y) + N] (x+1) / x^2 = 0$$

P_2 burada yerine konur ve x^2 ile çarpılır:

$$\frac{x(\tau - 1)}{y} + M [c_2 x^2 + x(1 + c_1 y)] + Nx$$

$$- \frac{[(\tau - 1)(x - 1) + M(1 + c_1 y) + N](x+1)}{y} = 0$$

Bu eşitlik basitleştirilince Eş. (30) bulunur.