



SİLİNDİR ETRAFINDA DIŞA DOĞRU KATILAŞMA PROBLEMİNİN PERTÜRBASYON YÖNTEMİ İLE ÇÖZÜMÜ

Cihat ARSLANTÜRK

Atatürk Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, Makina Mühendisliği Bölümü, 25240, Erzurum

Tel: 0 442 2314866, e-posta : carslan@atauni.edu.tr

(Geliş Tarihi : 03.03.2003)

Özet: Silindirik uzayda faz değişim problemlerinin analitik çözümleri olmadığından, bu problemlerin çözümleri için sayısal yöntemler kullanılır. Bu çalışmada, faz değişim sıcaklığındaki bir sıvının katılaşması problemi pertürbasyon yöntemi ile çözülmüş ve elde edilen sonuçlar literatürle karşılaştırılarak, pertürbasyon yöntemi ile yapılan çözümün literatür ile uyum içinde olduğu gösterilmiştir. Sonuçlar, bu yöntemin özellikle Stefan sayılarının küçük değerler aldığı gizli ısı depolama problemlerinde kullanılabileceğini göstermiştir.

Anahtar Kelimeler : Pertürbasyon Yöntemi, Katılaşma, Faz Değişimi, Hareketli Sınır Değer Problemi

PERTURBATION METHOD SOLUTION OF OUTWARD SOLIDIFICATION PROBLEM AROUND A CIRCULAR CYLINDER

Abstract: Numerical methods are usually employed to solve heat transfer problems with phase change in cylindrical domain since there is no analytical solution of the problem. A perturbation solution for outward solidification of a cylinder which is at the freezing temperature has been made and results of the solution are found to be in good agreement with those mentioned in open literature. The results have showed that the perturbation method can be especially used for latent heat storage problems with small Stefan number.

Keywords : Perturbation Method, Solidification, Phase Change, Moving Boundary Problems

SEMBOLLER

C_p	Özgül ısı [J/(kg.K)]
k	Isı iletim katsayısı [W/(m.K)]
L	Gizli ısı [J/kg]
r_0	Silindir yarıçapı [m]
r	Radyal koordinat [m]
R	Boyutsuz koordinat
s	Ara yüzey konumu [m]
S	Boyutsuz ara yüzey konumu
Ste	Stefan sayısı
t	Zaman [s]
T	Katı faz sıcaklığı [K]
T_0	Silindir yüzey sıcaklığı [K]
T_m	Faz değişim sıcaklığı [K]
ρ_0	Yoğunluk [kg/m ³]
α	Isıl yayılım katsayısı [m ² /s]
τ	Boyutsuz zaman

θ	Boyutsuz sıcaklık
$\theta_{1,2}$	Pertürbasyon fonksiyonları

GİRİŞ

Katılaşma veya erime olayını içeren ısı geçişi problemleri faz değişim problemi olarak bilinir. Katı ve sıvı fazları ayıran ara yüzeyin hareketli olması, problemin çözümünü güçleştirmektedir. Ara yüzey saf maddelerde keskin bir yüzey olarak ortaya çıkarken, alaşımlar ve çözeltilerde iki fazlı bir geçiş bölgesi mevcuttur. Katı ve sıvı fazlar içindeki sıcaklık dağılımları ile ara yüzey konumunun zamanla değişimlerinin bulunması problemin çözümünü oluşturur. Problemin matematik formülasyonu, entalpi ve sıcaklık formülasyonu olarak isimlendirilen iki şekilde verilebilir. Faz

değişimi ile uygulamada özellikle gizli ısı depolama, dökümcülük, buz üretimi ve yiyeceklerin dondurulması gibi alanlarda sık karşılaşılır. Ayrıca soğuk iklimlerdeki yapılar ve boru hatlarının tasarımında faz değişimi problemleri ile karşılaşilmektedir (Lunardini, 1981).

Faz değişimi problemlerinin sınırlı sayıda durum için bulunan analitik çözümleri mevcuttur. (Özişik, 1993). Analitik çözümü olmayan problemler için yaklaşık, yarı analitik ve sayısal yöntemler kullanılmaktadır. Literatürde farklı sınır şartları ve geometriler için, sonlu elemanlar, sonlu farklar gibi sayısal yöntemlerle ve integral yöntemi gibi yarı analitik yöntemlerle yapılan çözümler mevcuttur. Toksoy ve İlken (1988) tarafından, faz değişim problemlerinin sayısal ve yaklaşık çözümlerini içeren çalışmaların ayrıntılı bir özeti sunulmuştur.

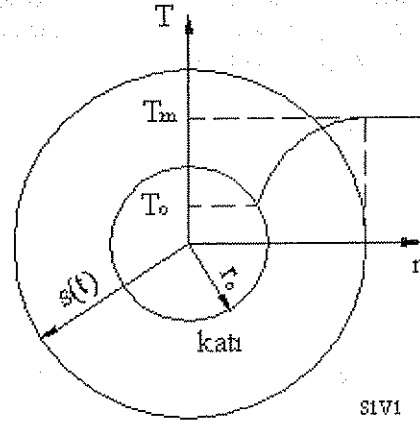
Çözüm için kullanılan sayısal yöntemlerden biri de bu çalışmada kullanılan pertürbasyon yöntemidir. Bir çok mühendislik uygulamasında doğrusal olmayan problemlerin çözümünde kullanılan bu yöntem, problemde yer alan ϵ gibi bir parametrenin küçük değerler alması durumunda bağlı değişkenin bu parametrenin üslerini içeren bir seri ile ifade edilmesine dayanır. Bu şekilde elde edilen seri açılımı parametrik pertürbasyon olarak bilinir (Nayfeh, 1993). Katılaşma ve erime problemlerinin, farklı sınır şartları ve geometriler için, pertürbasyon yöntemi ile yapılan çözümleri literatürde yer almaktadır. Pedrosa ve Domoto (1973) tarafından yapılan çalışmada, başlangıçta donma sıcaklığında bulunan bir kürenin katılaşması, sabit sıcaklık sınır şartı altında çözülmüştür. Gutman (1987), bir yüzeyi yalıtılmış diğer yüzeyi taşınım ve ışınlama ısı alışverişinde bulunan sonlu bir ortamın faz değişimi incelemiştir. Huang ve Shih (1975) tarafından yapılan bir çalışmada ise katılaşma sıcaklığındaki bir sıvının, küresel ve silindirik koordinatlarda içe ve dışa doğru katılaşma problemi, üçüncü çeşit sınır şartı altında çözülmüştür. Weinbaum ve Jiji (1977) kartezyen koordinatlarda bir yüzeyi yalıtılmış diğer yüzeyi sabit sıcaklıkta bulunan sonlu bir ortamın faz değişimi incelemiştir. Caldwell ve Kwan (2003), silindirik ve küresel koordinatlarda zamana bağlı sınır şartlarına sahip problemler için pertürbasyon metodunun kullanılabileceğini göstermişlerdir.

Bu çalışmada, yüzey sıcaklığı sabit bir silindirin etrafında bulunan faz değişim sıcaklığındaki sıvının katılaşması problemi, sıcaklık formülasyonu ile ifade edilerek pertürbasyon yöntemi ile çözülmüş, çözüm diğer sayısal, yarı analitik ve yaklaşık çözümlerle karşılaştırılmıştır.

MATEMATİKSEL MODEL

Matematiksel model, aşağıdaki kabuller yapılarak oluşturulmuştur.

- (a) Faz değişim malzemesi saf maddedir.
- (b) Malzemenin termo-fiziksel özellikleri sıcaklıkla değişmemektedir.
- (c) Bu model için $0 < Ste < 1$ 'dir.
- (d) Faz değişim malzemesinin temas ettiği silindirin yüzey sıcaklığının sabit olduğu kabul edilerek problem tek boyutlu olarak ifade edilmiştir.



Şekil 1. Bir silindir etrafında katılaşma problemi

Yapılan son kabul, silindir boyunun uç etkilerin ihmal edilebileceği kadar uzun olmasına karşı gelmektedir. Söz konusu silindir, içinden faz değişim malzemesinin katılaşma sıcaklığından daha düşük bir sıcaklıkta bulunan bir akışkanın aktığı bir boru olarak düşünülebilir. Bu durumda, son kabulün geçerli olabilmesi için boru içindeki ısı taşınım katsayısının büyük olması gerekir. Son kabule uymayan durumlar için problem iki boyutlu olarak düşünülmelidir.

Problemin matematiksel formülasyonu

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1)$$

$$T(r_0, t) = T_0 \quad T(s(t), t) = T_m \quad (2)$$

$$T(r, 0) = T_m \quad (3)$$

$$k \frac{\partial T}{\partial r} \bigg|_{r=s(t)} = \rho L \frac{ds}{dt} \quad (4)$$

$$s(t) = r_0 \quad t = 0 \text{ için} \quad (5)$$

Katı faz için enerji dengesi (1), denklemi sağlanması gereken sınır şartları (2) ve başlangıç şartı (3) denklemleriyle, ara yüzey için enerji dengesi (4) ve bu denklemi sağlayan başlangıç şartı (5) denklemleriyle ifade edilir.

Boyutsuzlaştırma

Pertürbasyon parametresinin belirlenmesi için denklem aşağıdaki boyutsuz büyüklükler kullanılarak, sırasıyla (1) ve (4) ile gösterilen katı faz ve ara yüzey denklemleri ve bu denklemlere ait sınır ve başlangıç şartları boyutsuzlaştırılır.

$$\theta = \frac{T - T_0}{T_m - T_0} \quad R = \frac{r}{r_0} \quad S = \frac{s(t)}{r_0} \quad (6.a)$$

$$\tau = \frac{\alpha t}{r_0^2} \quad Ste = \frac{C_p (T_m - T_0)}{L} \quad (6.b)$$

(1-5) denklemleri boyutsuz olarak (7-11) denklemleri ile ifade edilir.

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial \theta}{\partial R} \right) = \frac{\partial \theta}{\partial \tau} \quad (7)$$

$$\theta(R=1, \tau) = 0 \quad \theta(R=S, \tau) = 1 \quad (8)$$

$$\theta(R, \tau=0) = 1 \quad (9)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial R} \Big|_{R=S} = \frac{1}{Ste} \frac{\partial \theta}{\partial \tau} \quad (10)$$

$$S(0) = 1 \quad (11)$$

Pertürbasyon yöntemi ile çözüm

Faz değişimini etkileyen tek boyutsuz sayı olan Stefan Sayısı, pertürbasyon parametresi olarak seçilir. Problemin pertürbasyon yöntemi ile çözülebilmesi için pertürbasyon parametresinin katı faz denkleminde yer alması gerekir (Aziz, 1988).

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{\partial \theta}{\partial S} \frac{\partial S}{\partial \tau} \quad (12)$$

(12) denklemindeki ara yüzey konumunun zamana göre türevinin değeri, (10) denklemi ile verilen ara

yüzey denklemindeki yerine yazılır ve bu ifade (7) denkleminde taşınırsa,

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial \theta}{\partial R} \right) = Ste \frac{\partial \theta}{\partial S} \frac{\partial \theta}{\partial R} \Big|_{R=S} \quad (13)$$

denklemi $\theta = \theta(R, S)$ fonksiyonunu bağlı değişken olarak kabul eden diferansiyel denklem elde edilir. Bu denkleme ait sınır şartları (14) denklemi ile verilmiştir.

$$\theta(R=1, S) = 0 \quad \theta(R=S, S) = 1 \quad (14)$$

$$\theta = \theta_0 + Ste \theta_1 + O(Ste^2) \quad (15)$$

kabulü ile iki terimli pertürbasyon çözümü türetilir. Kabul edilen çözüm (13) denkleminde taşınarak θ_0 ve θ_1 fonksiyonlarını sağlayan denklemler ve sınır şartları elde edilir.

$$Ste^0: \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial \theta_0}{\partial R} \right) = 0 \quad (16.a)$$

$$[\theta_0(R=1, S) = 0, \quad \theta_0(R=S, S) = 1] \quad (16.b)$$

$$Ste^1: \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial \theta_1}{\partial R} \right) = \frac{\partial \theta_0}{\partial R} \Big|_{R=S} \frac{\partial \theta_0}{\partial S} \quad (17.a)$$

$$[\theta_1(R=1, S) = 0, \quad \theta_1(R=S, S) = 0] \quad (17.b)$$

(15) denklemi çözülerek θ_0 fonksiyonu aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$\theta_0(R, S) = \frac{\ln(R)}{\ln(S)} \quad (18)$$

(17) denklemi, (18) ile verilen θ_0 fonksiyonu da kullanılarak, aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$\theta_1(R, S) = \frac{R^2 [1 - \ln(R)] - 1}{4S^2 \ln(S)^3} + \frac{[S^2 \ln(S) - S^2 + 1] \ln(R)}{4S^2 \ln(S)^4} \quad (19)$$

Bu denklemler ara yüzey denkleminde yerlerine yazılırsa,

$$\frac{dS}{d\tau} = \frac{Ste}{S \ln(S)} + Ste^2 \left\{ \frac{[S^2 \ln(S) - S^2 + 1]}{4S^3 \ln(S)^4} + \frac{1}{4S \ln(S)^3} - \frac{1}{2S \ln(S)^2} \right\} \quad (20)$$

$\tau = \tau(S)$ fonksiyonu (20) denkleminin sayısal integrasyonu ile elde edilir.

SONUÇ ve DEĞERLENDİRME

Bu problem, katı faz içindeki sıcaklık dağılımının logaritmik olduğu varsayılarak çözülmüş, ve ara yüzey konumunun zamanla değişimi aşağıdaki boyutsuz denklemle ifade edilmiştir (Carslaw ve Jaeger, 1959).

$$\tau(S) = \frac{1}{4} \frac{2S^2 \ln(S) - S^2 + 1}{Ste} \quad (21)$$

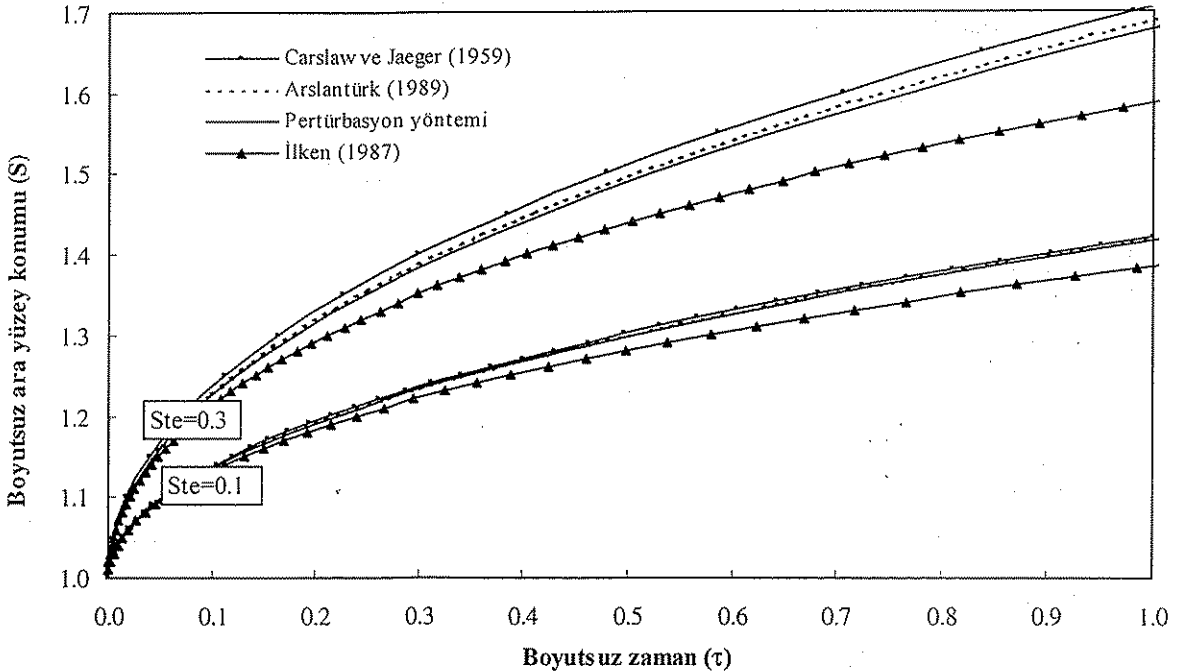
Problemın Integral metodu ile yapılan çözümünde, katı faz içindeki boyutsuz sıcaklık dağılımının doğrusal olduğu kabulü yapılmış ve ara yüzeyin konumu (22) denklemiyle verilmiştir (İlken, 1987).

$$\frac{dS}{d\tau} = \left(\frac{1 - \ln(S)}{S - 1} \right) \left(\frac{2Ste}{2 + Ste} \right) \quad (22)$$

Problem, Arslantürk (1989) tarafından sonlu elemanlar yöntemi ile çözülmüş, ara yüzeyin konumunun zamanla değişimi sayısal olarak elde edilmiştir.

Bütün bu çözümler ile bu çalışmada elde edilen sonuçlar Şekil 2' de gösterilmiştir.

Çözümler arasında farkların olması, yukarıda belirtildiği gibi her bir çözümde yapılan kabullerden kaynaklanmaktadır. Arslantürk (1989) tarafından sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak yapılan çözüm ise bir kabule dayanmamakta, ancak sayısal yöntemden kaynaklanan kesme ve yuvarlatma hataları ve sonlu elemanlar yönteminin doğasından kaynaklanan bir yaklaşıklık içerdiğinden, gerçek çözümden bir miktar farklı olacağı düşünülmektedir. Pertürbasyon yöntemi ile elde edilen çözümün, Şekil 2'de gösterilen çözümler içinde en doğru yaklaşımı içeren sonlu elemanlar yöntemi ile elde edilen çözümle (Arslantürk, 1989), uyumlu olması, bu çözümün gerçeğe yakın olduğunu göstermektedir. Pertürbasyon yöntemi ile yapılan çözüm



Şekil 2. Ara yüzey konumunun zamanla değişimi (Ste=0.1 ve Ste=0.3)

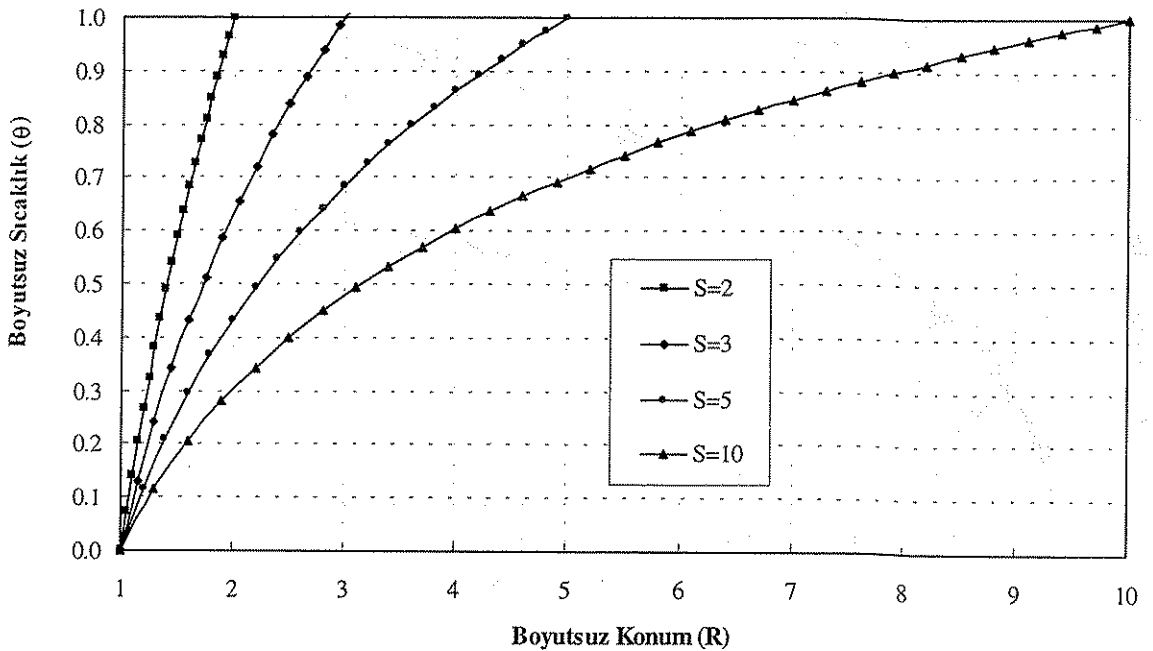
ve Arslantürk'ün çözümleri arasındaki en büyük fark boyutsuz zamanın $\tau=1$ değerinde ve $Ste=0.3$ için % 1.0 civarında olmaktadır. Burada boyutsuz zamanın $\tau=1$ olması, faz değişimi malzemesinin gizli ısı enerji depolamasında kullanılan bir faz değişim malzemesi (PCM) olan $CaCl_2.H_2O$ olması ve iç silindir çapının 10 cm olması halinde, boyutlu zamanın $t=27027$ saniye ≈ 7.5 saat olmasına karşı gelmektedir ($\alpha_{PCM}=3.7 \times 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$). Faz değişimi uygulamaları düşünüldüğünde, bu sürenin bir faz değişimi süreci için çok uzun olduğu anlaşılmaktadır. Zamanın çok büyük bir değerinde ve Ste sayısının izafi olarak büyük olduğu $Ste=0.3$ değerinde sonlu elemanlar yöntemi ile yapılan çözümle % 1.0 farklılık gösteren bu çözümün literatürle uyum içinde olduğu söylenebilir.

Bu çalışmada elde edilen sonuç $0 < Ste < 1$ aralığında geçerlidir. Ste sayısının bu aralık içinde küçük değerler alması durumunda Ste^2 ve daha sonraki terimlerin serinin ilk iki terimi yanında çok daha küçük olmasını sağlayacağından çözüm gerçeğe daha yakın olacaktır. Ancak bu durumda seriye eklenen θ_2 fonksiyonunu elde etmek için analitik olarak çözülmesi gereken diferansiyel denklem ilk iki fonksiyonu bulmak için çözülen denklemlere göre oldukça karmaşık olacaktır. Böylece, (20) denklemi ile verilen ara yüzeyin zamanla değişiminin elde edilmesi çok uzun işlemler gerektirecek ve kullanılması pratik olmayan bir denklem olacaktır. $Ste=0.1$ ve $Ste=0.3$

için Carslaw ve Jeager (1959), İlken (1987) ve Arslantürk'ün (1989) sonuçları ile pertürbasyon yöntemi ile bulunan sonuçlar Şekil 2.'de gösterilmiştir. Şekil 2.'den görüldüğü gibi, Ste sayısının küçük değerlerinde çözümün hassasiyetinin arttığını söylemek mümkündür.

Bu çalışmada kullanılan pertürbasyon seri açılımında $O(Ste^2)$ terimlerinin küçük olduğu varsayılarak çözüm yapılmıştır. Bu durumda $Ste=0.1$ olduğu takdirde, ihmal edilen terimlerin toplam etkisinin $O(0.01)$ olduğu ve hatanın %1 civarında olacağı söylenebilir.

Pertürbasyon parametresi olarak seçilen Ste sayısının küçük değerlerinde çözümün daha doğru olacağı belirtilmektedir (Aziz, 1988). Bu analizin $0 < Ste < 1$ aralığında geçerli olmasına karşın, özellikle Ste sayısının 0-0.3 aralığında değerler aldığı gizli ısı depolama süreçlerinin analizinde kullanılabileceği söylenebilir. Bu sistemlerde, gizli ısıları büyük olan ve faz değişim sıcaklıkları 0-100 °C aralığında olan maddeler faz değişim malzemesi olarak seçildiklerinden Ste sayısı küçük değerlere sahip olmaktadır. Metallerin faz değişiminde ise faz değişim sıcaklığı ile faz değişiminin olduğu ortam sıcaklığı arasındaki fark çok büyük olduğundan ve gizli ısıları gizli ısı depolamada kullanılan malzemelerle aynı mertebelerde değerler aldığından Ste sayıları çok büyük değerler almaktadır. Örneğin, ergimiş dökme



Şekil 3. Katı faz sıcaklık dağılımı ($Ste=0.1$)

demirin ortam sıcaklığında katılaşması olayında $Ste > 1000$ olmaktadır.

Şekil 3'de farklı zamanlarda katı faz içindeki sıcaklık dağılımları $Ste=0.1$ için verilmiştir. Profillerin özellikle S değerinin artmasıyla doğrusallıktan büyük ölçüde ayrıldıkları görülmektedir.

(15) denklemi ile verilen sıcaklık dağılımı ve (20) denklemi ile verilen ara yüzey hızı problemin çözümünü oluşturmaktadır. Sonlu farklar ve sonlu elemanlar yöntemleri gibi sayısal analizi diğer yöntemlere göre daha kolay yapılabilir.

KAYNAKLAR

Arsıantürk, C., Faz Değişimli Isı İletimi Problemlerinin Sonlu Elemanlar Yöntemi ile Çözümü, *Y. Lisans Tezi*, Dokuz Eylül Üniversitesi, 1989.

Aziz, A., Perturbation Methods, in *Handbook of Numerical Heat Transfer*, (Eds) Minkowycz, W.J. vd., John Wiley & Sons Inc., 1988.

Caldwell, J., Kwan, Y.Y., On the Perturbation Method for the Stefan Problem with Time-Dependent Boundary Conditions, *Int. Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol.46, 1497-1501, 2003.

Carslaw, H.S., Jaeger, J.C., *Conduction of Heat in Solids*, Clarendon Press, London, 1959.

Gutman, L.N., On the Problem of Heat Transfer in a Phase-Change Slab Initially not at the Critical Temperature, *J. Heat Transfer*, Vol. 109, 5-9, 1987.

Huang, C.L., Shih, Y.P., A Perturbation Method for Spherical and Cylindrical Solidification, *Chemical Engineering Science*, Vol. 30, 897-906, 1975.

İlken, B.Z., Dönen Bir Silindir Etrafında Faz Değişimi, *Y. Lisans Tezi*, Dokuz Eylül Üniversitesi, 1987.

Lunardini, V.J., *Heat Transfer in Cold Climates*, Van Nostrand Reinhold Company, New York, 1981.

Nayfeh, A.H., *Problems in Perturbation*, John Wiley & Sons Inc., 1993.

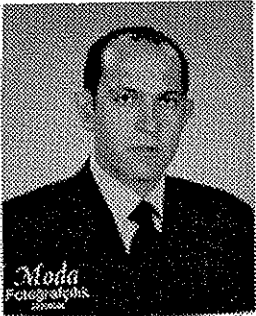
Özışık, M.N., *Heat Conduction* (Second Edition), John Wiley & Sons Inc., 1993.

Pedroso, R.I., Domoto, G.A., Perturbation Solutions for Spherical Solidification of Saturated Liquids, *J. Heat Transfer*, Vol. 95, 42-46, 1973.

Toksoy, M., İlken, B.Z., Phase Change Heat Transfer in Cylindrical Domain: Modeling and its Importance in the Thermal Energy Storage, For Presentation at the NATO ASI on Energy Storage Systems: Fundamentals and Applications, Çeşme, Turkey, 1988.

Weinbaum, S., Jiji, L.M., Singular Perturbation Theory for Melting or Freezing in Finite Domains Initially not at the Fusion Temperature, *J. Appl. Mech.*, 25-30, 1977.

Cihat ARSLANTÜRK



1964 yılında Sarıkamış-Kars'da doğdu. 1979 yılında Erzurum Lisesini bitirdi. 1980 yılında İTÜ Makine Fakültesi Genel Makine Mühendisliği Bölümü'nde yüksek öğrenimine başladı. 1984 yılında bu bölümden mezun oldu. Bir yıl özel bir kuruluşta ve MKE Silah ve Tüfek Fabrikasında çalıştıktan sonra, 1985 yılında Atatürk Üniversitesi Mühendislik Fakültesinde Araştırma Görevlisi olarak çalışmaya başladı. 1986 yılında, Dokuz Eylül Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde başladığı yüksek lisans çalışmalarını 1989 yılında tamamladı. Aynı yıl İTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü'nde doktora programına başladı ve 1997 yılında doktor ünvanı ile mezun oldu. 1998 yılında Atatürk Üniversitesi Mühendislik Fakültesi Termodinamik Ana Bilim Dalına Yardımcı Doçent olarak atandı. Halen Atatürk Üniversitesi Mühendislik Fakültesindeki görevine devam etmektedir.